

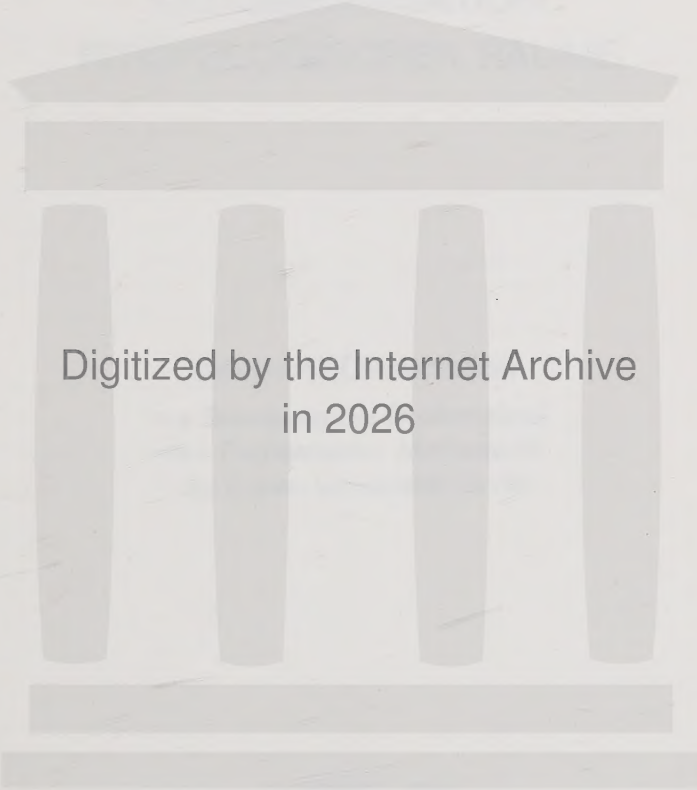
QUASIMETRISATION BITOPOLOGISCHER RÄUME

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Jürgen W. Zimmert
aus Fulda

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543105_0037

QUASIMETRISATION BITOPOLOGISCHER RÄUME

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Jürgen W. Zimmert
aus Fulda

1.Referent: Prof. Dr. G. Preuß

2.Referent: Prof. Dr. H. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung:

Tag der Promotion:

16. MAI 1973



Inhaltsverzeichnis

§0	Einleitung und Übersicht	2
§1	Quasimetriken und Pseudo-Quasimetriken	8
§2	$Bi-T_0$ -Räume	11
§3	Additive Hüllenoperatoren	13
§4	Paarüberdeckungen, Sternbildungen und Stern-Paarverfeinerungen	17
§5	Quasimetrisationssätze und Pseudo-Quasimetrisationssätze bitopologischer Räume (Verallgemeinerungen der Metrisationssätze von ALEXANDROFF/URYSOHN, FRINK, ARHANGELSKI, MORITA, NAGATA und WILLARD und andere Quasimetrisationssätze.)	20
§6	Über eine Frage von C.W.PATTY	42
§7	Der Quasimetrisationssatz für topologische Räume von H.RIBEIRO	47
	Literaturverzeichnis	48

0. Einleitung und Übersicht. Quasimetrische Räume wurden von WILSON [19] eingeführt und unter anderem von ihm [19], ALBERT [1], RIBEIRO [14], KELLEY [5] und in neuester Zeit von PATTY [13], LANE [7], SION/ZELMER [15], KIM [6] und STOLTENBERG [16] untersucht.

Ist X eine Menge, so heißt eine Abbildung p von $X \times X$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ Pseudo-Quasimetrik auf X , wenn für alle x, y, z aus X gilt: $p(x, y) \geq 0$, (ii) $p(x, x) = 0$ und (iii) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$. p heißt Quasimetrik auf X , wenn zusätzlich gilt: (ii') Aus $p(x, y) = 0$ folgt $x = y$. Durch die Zuordnung $x \mapsto \{B(x, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $B(x, n) = \{y \mid p(x, y) < 2^{-n}\}$ wird ein System von Umgebungsbasen auf X definiert. Mit $\mathcal{X}_p$ wird die dem System von Umgebungsbasen zugeordnete Topologie auf X bezeichnet.

Im Folgenden sollen die Wörter „(Pseudo)-Quasimetrik, (pseudo)-quasimetrisierbar, ...etc.“ in den einzelnen Abschnitten durchlaufend einmal als „Pseudo-Quasimetrik, pseudo-quasimetrisierbar, ...etc.“ und einmal als „Quasimetrik, quasimetrisierbar, ...etc.“ gelesen werden.

Ist p (Pseudo)-Quasimetrik auf X , so ist $\tilde{p}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{p}(x, y) = p(y, x)$ (Pseudo)-Quasimetrik auf X . In [5], [6], [7], [13], [16] werden die Topologien $\mathcal{X}_p$ und $\mathcal{X}_{\tilde{p}}$ gemeinsam untersucht. Ein bitopologischer Raum ist ein Tripel $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ Topologien auf X sind. (vgl. [5]).

In der vorliegenden Arbeit behandle ich die (Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit bitopologischer Räume, d.h. ich charakterisiere diejenigen bitopologischen Räume $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ für die es ein (Pseudo)-Quasimetrik p auf X gibt mit $(X, \mathcal{X}_p, \mathcal{X}_{\tilde{p}}) = (X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Diesbezüglich verallgemeinerte KELLEY [5] für bitopologische Räume mit abzählbaren $\mathcal{P}$ - und $\mathcal{Q}$ -Basen den klassischen Metrisationssatz von URYSOHN. LANE [7, S.248] gab eine Verallgemeinerung der hinreichenden Bedingung des Satzes von NAGATA/SMIRNOV/BING an. Er forderte für einen bitopologischen Raum $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ neben der „pairwise regularity“ die Existenz einer σ - $\mathcal{P}$ - und σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendlichen $\mathcal{P}$ -Basis und einer σ - $\mathcal{P}$ - und σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendlichen $\mathcal{Q}$ -Basis. Bis auf die geforderte

Regularitätseigenschaft sind die Bedingungen jedoch nicht notwendig. Nach einem Resultat von SION/ZELMER [15, S.1248] ist weder die Existenz von σ -punktendlichen $\mathcal{R}$ -Basen noch die Existenz von σ -punktendlichen $\mathcal{Q}$ -Basen notwendig. Dieses Ergebnis gibt Anlaß zu der Vermutung, daß es keine Verallgemeinerung des Satzes von NAGATA/SMIRNOV/BING in der Quasimetrisationstheorie bitopologischer Räume gibt. PATTY [13, S.387] vermutete darüber hinaus, daß es überhaupt schwierig sein wird, Verallgemeinerungen anderer Metrisationssätze zu erhalten.

In dieser Arbeit will ich die Metrisationssätze von ALEXANDROFF/URYSOHN [2], FRINK [4], ARHANGELSKI [3], MORITA [9], NAGATA [11] und WILLARD [18, S.168] verallgemeinern. Insbesondere fasse ich die verallgemeinerten Metrisationssätze systematisch zusammen und stelle eine Verallgemeinerung des Metrisationssatzes von ALEXANDROFF/URYSOHN als fundamental heraus. Für die allgemeine Topologie liefert dies zusätzlich eine systematische Zusammenfassung der oben genannten Metrisationssätze, für die der Satz von ALEXANDROFF/URYSOHN fundamental ist. Besonders möchte ich hervorheben, daß ich für den Satz von NAGATA, der in der Literatur mit Hilfe des Satzes von STONE [17] bewiesen wird (vgl. [11], [8], [12, S.189]), einen einfachen direkten Beweis angebe. Weiterhin schwäche ich die bereits erwähnte hinreichende Bedingung für die Quasimetrisierbarkeit bitopologischer Räume von LANE ab und beantworte damit eine Frage von C.W.PATTY. Am Ende der Arbeit gebe ich einen neuen Beweis des Quasimetrisationssatzes für topologische Räume von RIBEIRO [14], indem ich den Satz von RIBEIRO in einfacher Weise aus meiner Verallgemeinerung des Metrisationssatzes von WILLARD folgere.

Ich gebe jetzt den Inhalt der einzelnen Paragraphen an:

1. Im ersten Paragraphen werden die (pseudo)-quasimetrischen Räume definiert und einige einfache Eigenschaften dieser Räume ohne Beweise angegeben.

Die Aussage, daß es für einen bitopologischen Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ eine (Pseudo)-Quasimetrik p_1 auf X gibt mit

$$\chi_{p_1} = \mathcal{R} \text{ und } \chi_{\tilde{p}_1} \subset \mathcal{Q}, \text{ ist eine bitopologische Aussage.}$$

Formuliert man sie für den zu $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ „dualen“ bitopologischen Raum $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$, erhält man die „duale“ Aussage, daß es eine (Pseudo)-Quasimetrik p_2 auf X gibt mit $\chi_{p_2} = \mathcal{Q}$ und $\chi_{\tilde{p}_2} \subset \mathcal{R}$.

Nach Lemma 1.4 ist der Raum $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ genau dann (pseudo)-quasimetrisierbar, wenn es zwei (Pseudo)-Quasimetriken p_1, p_2 auf X gibt mit $\mathcal{X}_{p_1} = \mathcal{P}$, $\mathcal{X}_{\tilde{p}_1} \subset \mathcal{Q}$, $\mathcal{X}_{p_2} = \mathcal{Q}$ und $\mathcal{X}_{\tilde{p}_2} \subset \mathcal{P}$.

Dies legt nahe bei der Untersuchung der (Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit bitopologischer Räume $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ stets nur bitopologische Bedingungen zu suchen, die die Existenz einer (Pseudo)-Quasimetrik p auf X mit $\mathcal{X}_p = \mathcal{P}$ und $\mathcal{X}_{\tilde{p}} \subset \mathcal{Q}$ liefern. Durch zusätzliche Forderung der dualisierten Bedingung erhält man dann nach Lemma 1.4 die (Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit von $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ (vgl. 1.5). Ich lege daher das hier beschriebene „Dualitätsprinzip“ zugrunde, das im übrigen bei den Beweisen der bereits bestehenden (Pseudo)-Quasimetrisationssätzen verwendet wird. (vgl. [5, S.77], [7, S.248]) und führe in 1.3 für einen bitopologischen Raum $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ den Begriff der „Links-(Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit“ in dem Sinne ein, daß die Existenz einer (Pseudo)-Quasimetrik p auf X mit $\mathcal{X}_p = \mathcal{P}$ und $\mathcal{X}_{\tilde{p}} \subset \mathcal{Q}$ gefordert wird. Der Begriff „Links-(Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit“ bitopologischer Räume ist eine Verallgemeinerung der (Pseudo)-Metrisierbarkeit topologischer Räume. Nach Lemma 1.7 ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{P})$ genau dann (pseudo)-metrisierbar, wenn der bitopologische Raum $(X, \mathcal{P}, \mathcal{P})$ links-(pseudo)-quasimetrisierbar ist.

2. Bisher wurden in der Literatur Quasimetrisationssätze über bitopologische Räume aus Pseudo-Quasimetrisationssätzen hergeleitet, indem zusätzlich die „Bi-Hausdorffeigenschaft“ gefordert wurde. (vgl. [5], [7]). In diesem Paragraphen gebe ich eine die Klasse der Bi-Hausdorffräume echt umfassende Klasse $\text{Bi-}\mathcal{T}_0$ bitopologischer Räume an, deren Unterklasse bestehend aus den zusätzlich pseudo-quasimetrisierbaren Räumen, gerade die Klasse der quasimetrisierbaren Räume ist. Außerdem untersuche ich kurz in welcher Beziehung die Klasse $\text{Bi-}\mathcal{T}_0$ zu den Klassen der „pairwise- $\mathcal{T}_0$ “- und „pairwise- $\mathcal{T}_1$ “-Räumen steht.

3. In §5 verallgemeinere ich den bekannten Metrisationssatz von ALEXANDROFF/URYSOHN. Ich gebe einen neuen Beweis, der im wesentlichen darin besteht, eine Metrik mit Hilfe „iterativer Sternbildungen“ zu konstruieren. Wichtige Bestandteile des Beweises nehme ich in §3 vorweg, indem ich hier allgemeiner Sätze über „additive Hüllenoperatoren“ aufstelle. In §5 charakterisiere ich die (pseudo)-quasimetrisierbaren Räume durch die Existenz geeigneter additiver Hüllenoperatoren.

4. Bei einer Verallgemeinerung bekannter Metrisationssätze erschien es mir unerlässlich, auch die entsprechenden topologischen Begriffe zu verallgemeinern. Ich habe mich jedoch darauf beschränkt, nur einige wichtig erscheinende grundlegende Begriffe einzuführen. Zweifellos könnte man in diesem Zusammenhang eine Vielzahl weiterer Begriffe verallgemeinern.

Ich führe die, sich als nützlich erweisenden, bitopologischen Begriffe „Paarüberdeckung, offene Paarüberdeckung, Paarverfeinerung, Stern einer Paarverfeinerung und Stern-Paarverfeinerung“ ein. Hierbei haben mir die topologischen Begriffe „Überdeckung, offene Überdeckung, Verfeinerung, Stern einer Überdeckung und Sternverfeinerung“ Pate gestanden. In 4.5 zeige ich, daß die „Sternbildung“ ein additiver Hüllenoperator ist.

5. Der §5 enthält die interessantesten Ergebnisse dieser Arbeit. Eine Vorstudie über jene Metrisationssätze, die in ihren Beweisen nicht auf die Existenz einer σ -lokalendlichen Basis eingehen, zeigte mir, daß die Äquivalenz der geforderten Bedingungen, einfach, ohne direktes Eingehen auf die Existenz einer verträglichen Metrik gezeigt werden kann. Die hierzu ausgeführten, zum Teil neuen Beweise, ermöglichten es mir, mehrere Quasimetrisationssätze für bitopologische Räume aufzustellen, die Verallgemeinerungen von klassischen Resultaten darstellen.

Wie in §1 ausgeführt, liefert jede Charakterisierung der Links-(Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit bitopologischer Räume eine Charakterisierung der (Pseudo)-Metrisierbarkeit topologischer Räume und nach dem „Dualitätsprinzip“ eine Charakte-

risierung der (Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit bitopologischer Räume. Ich gebe daher in 5.1 einen Links-(Pseudo)-Quasimetrisationssatz an, der den Satz von ALEXANDROFF/URYSOHN [2] verallgemeinert. In 5.2 stelle ich eine systematische Zusammenfassung von sieben weiteren Links-(Pseudo)-Quasimetrisationssätzen auf, die unter anderem die Sätze von FRINK [4], ARHANGELSKI [3], MORITA [9], NAGATA [11] und WILLARD [18, S.168] verallgemeinert. Korollar 5.4 gibt eine aus 5.2 folgende systematische Zusammenfassung der oben genannten (Pseudo)-Metrisationssätze für die allgemeine Topologie an. Korollar 5.3 gibt eine entsprechende Zusammenfassung von (Pseudo)-Quasimetrisationssätzen bitopologischer Räume an. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, habe ich in den Korollaren die Bedingungen zum Teil schärfer notiert als es nach 1.5 erforderlich gewesen wäre. Jedoch kann die Notwendigkeit immer noch leicht gezeigt werden.

6. PATTY [13, S.390] stellte die Frage, ob jeder bi-reguläre bitopologische Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{R}$ eine σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendliche Basis und $\mathcal{Q}$ eine σ - $\mathcal{R}$ -lokalendliche Basis besitzt, pseudo-quasimetrisierbar ist. LANE [7, S.248] zeigte, daß jeder bi-reguläre bitopologische Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{R}$ eine σ - $\mathcal{Q}$ - und σ - $\mathcal{R}$ -lokalendlichen Basis und $\mathcal{Q}$ eine σ - $\mathcal{R}$ - und σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendlichen Basis besitzt pseudo-quasimetrisierbar ist. Ich beantworte in diesem Paragraphen PATTYs Frage positiv, indem ich im wesentlichen die Argumentation von LANE verwende. Der Satz, daß ein bi-regulärer Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{R}$ eine σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendliche Basis und $\mathcal{Q}$ eine σ - $\mathcal{R}$ -lokalendliche Basis besitzt, pseudo-quasimetrisierbar ist, stellt eine Verallgemeinerung der hinreichenden Bedingung des Satzes von NAGATA/SMIRNOV/BING dar und schwächt die Bedingung von LANE ab

7. In §7 gebe ich einen neuen Beweis des Quasimetrisationssatzes für topologische Räume von RIBEIRO [14]. STOLTENBERG [16, S.65] zeigte, daß man den Satz von RIBEIRO einfach mit Hilfe der Theorie der quasi-uniformen Räume beweisen kann. Ich folgere ebenfalls einfach den Satz von RIBEIRO aus meinem Satz 5.4 F., der eine bitopologische Verallgemeinerung des Metrisationssatzes von WILLARD [18, S.168] darstellt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. P r e u ß recht
herzlich für seine Anregungen und das große Interesse, das
er dieser Arbeit entgegenbrachte.

1. Pseudo-Quasimetriken und Quasimetriken.

1.1 Definitionen. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Pseudo-Quasimetrik auf X , wenn für alle x, y, z aus X

$$(a) \quad p(x, y) \geq 0$$

$$(b) \quad p(x, x) = 0$$

$$(c) \quad p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$$

gilt. p heißt Quasimetrik auf X , wenn zusätzlich

$$(b') \quad p(x, y) = 0 \implies x = y$$

gilt.

Eine Pseudo-Quasimetrik p auf X heißt Pseudo-Metrik auf X , wenn

$$(d) \quad p(x, y) = p(y, x) \quad \text{für alle } x, y \text{ aus } X$$

gilt. Eine Quasimetrik p auf X heißt Metrik auf X , wenn (d) gilt.

1.2 Bemerkungen und Bezeichnungen. X bezeichne eine Menge.

(0) Sei p eine (Pseudo)-Quasimetrik auf X und $n \in \mathbb{N}$. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt

$$B_p(x, n) = \{y \mid p(x, y) < 2^{-n}\}, \quad B_p^1(x, n) = \{y \mid p(y, x) < 2^{-n}\}.$$

Sofern keine Verwechslung auftreten kann wird auch $B(x, n)$ statt $B_p(x, n)$ und $B^1(x, n)$ statt $B_p^1(x, n)$ geschrieben.

(1) Sei p eine (Pseudo)-Quasimetrik auf X . $\bigcup_{x \in X} \{B(x, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

ist Basis einer Topologie auf X , die mit $\mathcal{T}_p$ bezeichnet

wird. $\{B(x, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist Umgebungsbasis von x . Damit ist eine Abbildung χ_p von der Menge der (Pseudo)-Quasimetriken auf X in die Menge der Topologien auf X erklärt.

(2) Seien p_1, p_2 (Pseudo)-Quasimetriken auf X . $p_1 + p_2: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $(p_1 + p_2)(x, y) = p_1(x, y) + p_2(x, y)$ ist (Pseudo)-Quasimetrik auf X . Auf der Menge der (Pseudo)-Quasimetriken auf X ist damit eine assoziative und kommutative Verknüpfung $+$ erklärt.

- (3) Auf der Menge der (Pseudo)-Quasimetriken auf X ist eine Bijektion $\sim$ erklärt durch $\tilde{p}(x, y) = p(y, x)$. $\sim$ ist verträglich mit der Verknüpfung $+$, d.h. $\widetilde{(p_1 + p_2)} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$. Es gilt $B'_p(x, n) = B_{\tilde{p}}(x, n)$.
- (4) Sei p eine (Pseudo)-Quasimetrik auf X . $p + \tilde{p}$ ist (Pseudo)-Metrik auf X .
- (5) Seien p_1, p_2 (Pseudo)-Quasimetriken auf X . $\chi_{p_1 + p_2}$ ist die grösste Topologie auf X , die feiner als χ_{p_1} und χ_{p_2} ist.

Die Aussagen bzw. Bezeichnungen von (0) - (5) gelten auch, wenn man „(Pseudo)-Quasimetrik“ durch „(Pseudo)-Metrik“ ersetzt. Die Aussage (3) wird dann trivial, d.h. $\sim$ ist die Identität.

1.3 Definitionen. Sei X eine Menge. Das Tripel $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ heisst bitopologischer Raum, wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Topologien auf X sind.

$(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ heisst links-(pseudo)-quasimetrisierbar, wenn es eine (Pseudo)-Quasimetrik p auf X gibt mit $\chi_p = \mathcal{P}$ und $\chi_p \subset \mathcal{Q}$.

$(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ heisst (pseudo)-quasimetrisierbar, wenn es eine (Pseudo)-Quasimetrik p auf X gibt mit

$$(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) = (X, \chi_p, \chi_{\tilde{p}}).$$

1.4 Lemma. Sind $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ein bitopologischer Raum und p_1, p_2 (Pseudo)-Quasimetriken auf X mit $\chi_{p_1} = \mathcal{P}$, $\chi_{\tilde{p}_1} \subset \mathcal{Q}$, $\chi_{p_2} \subset \mathcal{P}$ und $\chi_{\tilde{p}_2} = \mathcal{Q}$, dann ist $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) = (X, \chi_{p_1 + p_2}, \chi_{\widetilde{(p_1 + p_2)}})$, d.h. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ist (pseudo)-quasimetrisierbar.

Beweis. Klar nach 1.2(5) und 1.2(3).

1.5 Bemerkung. Nach Lemma 1.4 ist ein bitopologischer Raum $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ genau dann (pseudo)-quasimetrisierbar, wenn $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ und der zu $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ duale bitopologische Raum $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ links-(pseudo)-quasimetrisierbar sind.

1.6 Definitionen. Sei $(X, \mathcal{R})$ ein topologischer Raum.

$(X, \mathcal{R})$ heißt (pseudo)-quasimetrisierbar, wenn es eine (Pseudo)-Quasimetrik p auf X gibt mit $\mathcal{X}_p = \mathcal{R}$.

$(X, \mathcal{R})$ heißt (pseudo)-metrisierbar, wenn es eine (Pseudo)-Metrik p auf X gibt mit $\mathcal{X}_p = \mathcal{R}$.

1.7 Lemma. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{R})$ ist genau dann (pseudo)-metrisierbar, wenn $(X, \mathcal{R}, \mathcal{R})$ links-(pseudo)-quasimetrisierbar ist.

Beweis. Klar nach 1.5, Lemma 1.4 und 1.2(4).

1.8 Bemerkung. Nach Lemma 1.6 liefert jede Charakterisierung der Links-(Pseudo)-Quasimetrisierbarkeit bitopologischer Räume eine Charakterisierung der (Pseudo)-Metrisierbarkeit topologischer Räume.

1.9 Lemma. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{R})$ ist genau dann (pseudo)-quasimetrisierbar, wenn es eine Topologie $\mathcal{Q}$ auf X gibt, so daß der bitopologische Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ links-(pseudo)-quasimetrisierbar ist.

Beweis. Klar nach Definition.

2. Bi- T_0 -Räume.

2.1 Definitionen. $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ bezeichne einen bitopologischen Raum.

- (1) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt pairwise- T_0 , wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x und y aus X eine $\mathcal{R}$ - oder $\mathcal{Q}$ -Umgebung von x oder y gibt, die nicht beide Punkte enthält.
- (2) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt pairwise- T_1 , wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x und y aus X eine $\mathcal{R}$ - oder $\mathcal{Q}$ -Umgebung von x gibt, die y nicht enthält.
- (3) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt bi-hausdorffsch, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x und y aus X eine $\mathcal{R}$ -Umgebung P von x und eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung Q von y gibt mit $P \cap Q = \emptyset$.

Vergleiche z.B. [16, S.61].

2.2 Definition. Ein bitopologischer Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt bi- T_0 , wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x und y aus X eine $\mathcal{R}$ -Umgebung P von x mit $y \notin P$ oder eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung Q von y mit $x \notin Q$ gibt.

2.3 Bemerkungen.

- (1) Nach Definition ist jeder bi- T_0 -Raum auch pairwise- T_1 und damit auch pairwise- T_0 .
- (2) Nach Definition ist jeder bi-Hausdorffraum auch bi- T_0 -Raum. Die in (1) und (2) angegebenen Inklusionen sind echt. Es gilt:
- (3) $(\{x, y\}, \{\{x\}, \{x, y\}, \emptyset\}, \{\{x, y\}, \{y\}, \emptyset\})$ ist pairwise- T_1 und damit auch pairwise- T_0 aber nicht bi- T_0 .
- (4) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}(\mathbb{R}), \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ ist bi- T_0 -Raum aber kein bi-Hausdorffraum.

2.4 Lemma. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{R})$ ist genau dann T_0 -Raum, wenn $(X, \mathcal{R}, \mathcal{R})$ bi- T_0 -Raum ist.

Beweis. Klar nach Definition.

2.5 Lemma. Ein pseudo-quasimetrisierbarer bitopologischer Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ist genau dann quasimetrisierbar, wenn er $\text{bi-}T_0$ -Raum ist.

Beweis. (notwendig). Sei p eine Quasimetrik auf X mit $\chi_p = \mathcal{R}$ und $\chi_{\tilde{p}} = \mathcal{Q}$. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $p(x, y) = r$. Nach 1.1(b') ist $r > 0$. Damit ist $B = \{z \mid p(x, z) < r\}$ eine $\mathcal{R}$ -Umgebung von x mit $y \notin B$.

(hinreichend). Sei p eine Pseudo-Quasimetrik auf X mit $\chi_p = \mathcal{R}$ und $\chi_{\tilde{p}} = \mathcal{Q}$. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Ich zeige für p die Eigenschaft 1.1(b').

1.Fall. Es gibt eine $\mathcal{R}$ -Umgebung P von x mit $y \notin P$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $B(x, r) = \{z \mid p(x, z) < 2^{-r}\} \subset P$. Aus $y \notin B(x, r)$ folgt $p(x, y) \geq 2^{-r} > 0$.

2.Fall. Es gibt eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung Q von y mit $x \notin Q$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $B'(y, r) = \{z \mid p(z, y) < 2^{-r}\} \subset Q$. Aus $x \notin B'(y, r)$ folgt $p(x, y) \geq 2^{-r} > 0$.

3. Additive Hüllenoperatoren.

3.0 Bezeichnung. Mit $\mathbb{N}$ werden die natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots\}$ bezeichnet.

3.1 Definitionen. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\phi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ heißt isotoner Hüllenoperator auf X , wenn für alle A und B aus $\mathcal{P}(X)$

$$(a) \phi(A) \supset A$$

$$(b) A \subset B \implies \phi(A) \subset \phi(B)$$

gilt. ϕ heißt additiver Hüllenoperator auf X , wenn zusätzlich

$$(c) \phi(A) = \bigcup \{ \phi(\{x\}) \mid x \in A \}$$

gilt. (Beachte (c) impliziert (b).)

Sind φ, ψ additive (isotone) Hüllenoperatoren, dann ist $\varphi \circ \psi$ additiver (isotoner) Hüllenoperator. Die Identität $\text{id}_{\mathcal{P}(X)}$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist additiver Hüllenoperator.

Wie für Abbildungen üblich, wird daher ϕ^n rekursiv definiert durch: $\phi^1 = \phi$, $\phi^2 = \phi \circ \phi$, $\phi^3 = \phi \circ \phi^2$, ..., $\phi^n = \phi \circ \phi^{n-1}$. $\phi^0: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ wird definiert durch $\phi^0 = \text{id}_{\mathcal{P}(X)}$.

Sofern keine Verwechslung auftreten kann, schreibe ich $\phi(x)$ statt $\phi(\{x\})$.

3.2 Lemma. Seien X eine Menge und ϕ ein additiver Hüllenoperator auf X . Für jedes r aus $\mathbb{N}$ und jedes A aus $\mathcal{P}(X)$ gilt

$$\phi^r(A) = \bigcup \{ \phi^r(x) \mid x \in A \}.$$

Beweis. (Durch vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen.) Sei $r \in \mathbb{N}$.

I. Sei $r = 1$. Dann ist $\phi^1 = \phi$. Nach Definition 3.1(c) gilt

$$\phi(A) = \bigcup \{ \phi(x) \mid x \in A \}.$$

II. Sei die Aussage von Lemma 3.2 richtig für alle $t \leq r$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \phi^{r+1}(A) &= \phi(\phi^r(A)) = \phi\left(\bigcup \{\phi^r(x) \mid x \in A\}\right) \\
 &= \bigcup \{\phi(y) \mid y \in \bigcup \{\phi^r(x) \mid x \in A\}\} \\
 &= \bigcup_{x \in A} (\bigcup \{\phi(y) \mid y \in \phi^r(x)\}) \\
 &= \bigcup \{\phi(\phi^r(x)) \mid x \in A\} = \bigcup \{\phi^{r+1}(x) \mid x \in A\}.
 \end{aligned}$$

3.3 Satz. Sei X eine Menge. Seien r_0 aus $\mathbb{N}$ und für jedes n aus $\mathbb{N}$ ϕ_n additiver Hüllenoperator auf X , so daß für alle x aus X und n aus $\mathbb{N}$

$$\phi_n^{r_0}(x) \subset \phi_{n-1}(x)$$

gilt, dann gilt für alle A aus $\mathcal{A}(X)$ und n aus $\mathbb{N}$

- (1) $\phi_n^{r_0}(A) \subset \phi_{n-1}(A)$
- (2) $\phi_n^{2r_0}(A) \subset \phi_{n-2}(A)$
- (3) $s \geq n \implies \phi_s^{r_0}(A) \subset \phi_n^{r_0}(A).$

Beweis. (1). Aus Lemma 3.2 folgt

$$\phi_n^{r_0}(A) = \bigcup \{\phi_n^{r_0}(x) \mid x \in A\} \subset \bigcup \{\phi_{n-1}(x) \mid x \in A\} = \phi_{n-1}(A).$$

(2). Aus (1) und der Isotonie von ϕ_{n-1} folgt

$$\begin{aligned}
 \phi_n^{2r_0}(A) &= \phi_n^{r_0}(\phi_n^{r_0}(A)) \subset \phi_n^{r_0}(\phi_{n-1}(A)) \subset \phi_{n-1}(\phi_{n-1}(A)) = \phi_{n-1}^2(A) \\
 &\subset \phi_{n-1}^3(A) \subset \dots \subset \phi_{n-1}^{r_0}(A) \subset \phi_{n-2}(A).
 \end{aligned}$$

(3). Für $s = n$ gilt $\phi_s^{r_0}(A) \subset \phi_n^{r_0}(A)$ trivialerweise.

Sei $s > n$. Durch iterative Anwendung von (1) und der Eigenschaft 3.1(a) der Operatoren erhalte ich

$$\begin{aligned}
 \phi_s^{r_0}(A) &\subset \phi_{s-1}(A) \subset \phi_{s-1}^2(A) \subset \dots \subset \phi_{s-1}^{r_0}(A) \\
 \phi_{s-1}^{r_0}(A) &\subset \phi_{s-2}(A) \subset \phi_{s-2}^2(A) \subset \dots \subset \phi_{s-2}^{r_0}(A) \\
 &\vdots \\
 \phi_{n+1}^{r_0}(A) &\subset \phi_n(A) \subset \phi_n^2(A) \subset \dots \subset \phi_n^{r_0}(A).
 \end{aligned}$$

3.4 Satz. Seien X eine Menge und für jedes n aus $\mathbb{N}$ ϕ_n additiver Hüllenoperator auf X , so daß für alle x aus X und alle n aus $\mathbb{N}$

$$\phi_n^3(x) \subset \phi_{n-1}(x)$$

gilt, dann folgt

(*) Für alle A aus (X) und alle s und r aus $\mathbb{N}$ und jede

Folge $(k_i)_{1 \leq i \leq s}$ natürlicher Zahlen mit $\sum_{i=1}^s 2^{-k_i} < 2^{-r}$ gilt

$$\phi_{k_s} \circ \phi_{k_{s-1}} \circ \dots \circ \phi_{k_2} \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_r(A).$$

Beweis. Nach Satz 3.3(1) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $A \in \mathcal{P}(X)$

$$\phi_n^3(A) \subset \phi_{n-1}(A).$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen s geführt. In den Beweis gehen mehrfach stillschweigend die Eigenschaften 3.1(a) und (b) der Operatoren ϕ_n und Lemma 3.3(3) ein.

I. Für $s = 1$ folgt aus $2^{-k_1} < 2^{-r}$; $k_1 \geq r+1$. Damit gilt $\phi_{k_1}(A) \subset \phi_{r+1}(A) \subset \phi_{k_1} \circ \phi_{r+1}(A) \subset \phi_{r+1} \circ \phi_{r+1}(A) = \phi_{r+1}^2(A) \subset \phi_{r+1}^3(A)$. Nach Voraussetzung gilt aber $\phi_{r+1}^3(A) \subset \phi_r(A)$.

II. Sei $m \geq 1$, und die Aussage (*) richtig für alle $s \leq m$. Sei weiterhin $(k_j)_{1 \leq j \leq m+1}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\sum_{j=1}^{m+1} 2^{-k_j} < 2^{-r}$.

Da $\phi_{r+1}^3(A) \subset \phi_r(A)$ gilt, genügt es

$$\phi_{k_{m+1}} \circ \phi_{k_m} \circ \dots \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_{r+1}^3(A)$$

zu zeigen.

1. Fall. Es gibt ein j_0 , $1 \leq j_0 \leq m+1$ mit

$$\sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{-kj} < 2^{-(r+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-kj} \geq 2^{-(r+1)}.$$

Beachte: $\sum_{j=j_0+1}^{m+1} 2^{-kj} < 2^{-(r+1)}$ und $k_j \geq r+1$ für $1 \leq j \leq m+1$.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\phi_{k_{j_0-1}} \circ \phi_{k_{j_0-2}} \circ \dots \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_{r+1}(A).$$

Durch iterative Anwendung der Isotonie erhalte ich

$$\phi_{k_{m+1}} \circ \phi_{k_m} \circ \dots \circ \phi_{k_{j_0-1}} \circ \phi_{k_{j_0-2}} \circ \dots \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_{k_{m+1}} \circ \dots \circ \phi_{k_{j_0}} \phi_{r+1}(A).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\phi_{k_{m+1}} \circ \phi_{k_m} \circ \dots \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_{r+1} \phi_{k_{j_0}} \phi_{r+1}(A) \subset \phi_{r+1} \phi_{r+1} \phi_{r+1}(A) = \phi_{r+1}^3(A).$$

2. Fall. Es gibt kein j_0 , $1 \leq j_0 \leq m+1$ mit

$$\sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{-kj} < 2^{-(r+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-kj} \geq 2^{-(r+1)}.$$

Dann gilt entweder $\alpha)$ $\sum_{j=1}^{m+1} 2^{-kj} < 2^{-(r+1)}$. Beachte $k_{m+1} \geq r+1$.

oder $\beta)$ $2^{-k_1} = 2^{-(r+1)}$. Beachte $\sum_{j=2}^{m+1} 2^{-kj} < 2^{-(r+1)}$
und $k_1 = r+1$.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt für

$$\alpha) \phi_{k_m} \circ \dots \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_{r+1}(A)$$

$$\phi_{k_{m+1}} \circ \phi_{k_m} \circ \dots \circ \phi_{k_1}(A) \subset \phi_{k_{m+1}} \phi_{r+1}(A) \subset \phi_{r+1} \phi_{r+1}(A) \subset \phi_{r+1}^3(A).$$

$$\beta) \phi_{k_{m+1}} \circ \dots \circ \phi_{k_2}(\phi_{k_1}(A)) \subset \phi_{r+1}(\phi_{k_1}(A)) \subset \phi_{r+1} \phi_{r+1}(A) \subset \phi_{r+1}^3(A).$$

Es gilt entweder Fall 1 oder Fall 2; damit ist der Beweis beendet.

4. Paarüberdeckungen, Sternbildungen und Stern-Paarverfeinerungen.

4.1 Definition. Seien X und I Mengen. Eine Abbildung $\psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ heißt Paarüberdeckung von X , wenn

$$\bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \cap p_2 \circ \psi(i) \mid i \in I \} = X$$

gilt, wobei p_1 und p_2 die beiden Projektionen von $\mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ bezeichnen.

Ich verwende auch die Schreibweise $\psi = ((A, B)_i)_{i \in I}$, wobei $(A, B)_i = \psi(i)$ ist.

4.2 Bemerkungen und Bezeichnungen.

- (1) Ist ψ eine Paarüberdeckung von X , dann sind $p_1 \circ \psi$ und $p_2 \circ \psi$ Überdeckungen von X . Ist $\tau: I \rightarrow \mathcal{R}(X)$ eine Überdeckung von X , dann ist $(\tau, \tau): I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ definiert durch $(\tau, \tau)(i) = (\tau(i), \tau(i))$ eine Paarüberdeckung von X .
- (2) Jeder Paarüberdeckung $\psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ ist eine Paarüberdeckung $\psi' = S \circ \psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ zugeordnet. S bezeichnet hierbei die Spiegelungsabbildung $((A, B) \mapsto_S (B, A))$. Damit ist eine bijektive Abbildung $\cdot'$ auf der Menge der Paarüberdeckungen von X definiert.
- (3) Sei $\psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ eine Paarüberdeckung und $\Delta = \{(A, A) \mid A \subset X\}$ die Diagonale in $\mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$. Es gilt $\psi[I] \subset \Delta$ genau dann, wenn $\psi = \psi'$.

4.3 Definition. Sind $\psi: I_1 \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ und $\tilde{\psi}: I_2 \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ zwei Paarüberdeckungen von X , dann heißt ψ Paarverfeinerung von $\tilde{\psi}$, wenn es zu jedem $i \in I_1$ ein $k \in I_2$ gibt mit $p_1 \circ \psi(i) \times p_2 \circ \psi(i) \subset p_1 \circ \tilde{\psi}(k) \times p_2 \circ \tilde{\psi}(k)$.

Bemerkung. Sind $\psi, \tilde{\psi}$ zwei Paarüberdeckungen von X und ψ Paarverfeinerung von $\tilde{\psi}$, dann ist für $i=1,2$ die Überdeckung $p_i \circ \psi$ Verfeinerung von $p_i \circ \tilde{\psi}$.

ψ ist Paarverfeinerung von $\tilde{\psi}$ genau dann, wenn ψ' Paarverfeinerung von $\tilde{\psi}'$ ist.

4.4 Definition. Sei $\psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ eine Paarüberdeckung von X . Für A aus $\mathcal{R}(X)$ heißt

$$\text{St}(A, \psi) = \bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \mid i \in I \text{ und } p_2 \circ \psi(i) \cap A \neq \emptyset \}$$

ψ -Stern von A .

Sofern keine Verwechslung auftreten kann schreibe ich $\text{St}(x, \psi)$ statt $\text{St}(\{x\}, \psi)$.

Bemerkung. Gilt $\psi = \psi'$, dann ist $\text{St}(A, \psi)$ die übliche „Sternbildung“ in der Topologie bez. $p_1 \circ \psi$ (vgl. z.B. [12, S.50]).

4.5 Lemma. Sei $\psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ eine Paarüberdeckung von X . $\text{St}(\cdot, \psi): \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ definiert durch
 $\text{St}(\cdot, \psi)(A) = \text{St}(A, \psi)$ ist ein additiver Hüllenoperator auf X .

Beweis. Ich zeige 3.1(a), und 4a). Sei $A \in \mathcal{R}(X)$. Aus den Definitionen erhält man für

$$\begin{aligned} \text{(a) } \text{St}(A, \psi) &= \bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \mid i \in I \text{ und } p_2 \circ \psi(i) \cap A \neq \emptyset \} \\ &\supset \bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \cap p_2 \circ \psi(i) \cap A \mid i \in I \} \\ &= \bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \cap p_2 \circ \psi(i) \mid i \in I \} \cap A = X \cap A = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \text{St}(A, \psi) &= \bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \mid i \in I \text{ und } p_2 \circ \psi(i) \cap A \neq \emptyset \} \\ &= \bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \mid i \in I \text{ und } \bigcup_{x \in A} (p_2 \circ \psi(i) \cap \{x\}) \neq \emptyset \} \\ &= \bigcup_{x \in A} \left(\bigcup \{ p_1 \circ \psi(i) \mid i \in I \text{ und } p_2 \circ \psi(i) \cap \{x\} \neq \emptyset \} \right) \\ &= \bigcup_{x \in A} \text{St}(x, \psi). \end{aligned}$$

4.6 Bemerkungen und Bezeichnungen.

- (1) Statt $(\text{St}(\cdot, \psi))^n$ schreibe ich $\text{St}^n(\cdot, \psi)$.
- (2) Jeder Paarüberdeckung $\psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ ist eine Paarüberdeckung $\psi^* = (\text{St}(\cdot, \psi) \times \text{St}(\cdot, \psi')) \circ \psi: I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ zugeordnet, wobei $\text{St}(\cdot, \psi) \times \text{St}(\cdot, \psi'): \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ durch $(\text{St}(\cdot, \psi) \times \text{St}(\cdot, \psi'))(P, Q) = (\text{St}(P, \psi), \text{St}(Q, \psi'))$ definiert ist. Man erhält damit eine Abbildung $\cdot^*$ auf der Menge der Paarüberdeckungen von X .

4.7 Definition. Sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Paarüberdeckungen auf X . $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Stern-Paarverfeinerung, wenn für jedes n aus $\mathbb{N}$ ψ_n^* Paarverfeinerung von ψ_{n-1} ist.

Bemerkung. Gilt $(\psi_n) = (\psi'_n)$, dann ist (ψ_n) eine Stern-Paarverfeinerung genau dann, wenn $(p_1 \circ \psi_n)$ in der Topologie eine Sternverfeinerung ist

4.8 Definition. Sei $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ein bitopologischer Raum. Eine Paarüberdeckung ψ auf X heißt offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$, wenn $\psi[I] \subset \mathcal{R} \times \mathcal{Q}$ gilt.

Eine Familie (ψ_n) von Paarüberdeckungen auf X heißt offen, wenn für jedes n ψ_n offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ist.

Bemerkung. Ist ψ offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$, dann ist $p_1 \circ \psi$ offene Überdeckung von $(X, \mathcal{R})$ und $p_2 \circ \psi$ offene Überdeckung von $(X, \mathcal{Q})$. Ist $\tau: I \rightarrow \mathcal{R}(X)$ offene Überdeckung von $(X, \mathcal{R})$, dann ist $(\tau, \tau): I \rightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ definiert durch $(\tau, \tau)(i) = (\tau(i), \tau(i))$ offener Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{R}, \mathcal{R})$.

Ist ψ offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$, dann ist ψ' offene Paarüberdeckung vom dualen Raum $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$.

5. Pseudo-Quasimetrisation und Quasimetrisation bitopologischer Räume.

5.1 Satz. Ein bitopologischer Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ist genau dann links-pseudo-quasimetrisierbar, wenn es eine Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen gibt mit

(a) Für jedes n aus $\mathbb{N}$ und jedes x aus X gilt

$$\text{St}^2(x, \psi_n) \subset \text{St}(x, \psi_{n-1}).$$

(b) Zu jedem $P \in \mathcal{R}$ und $x \in P$ gibt es ein n aus $\mathbb{N}$ mit

$$\text{St}(x, \psi_n) \subset P.$$

Beweis. (notwendig). Sei p eine Pseudo-Quasimetrik auf X mit $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q}) = (X, \mathcal{X}_p, \mathcal{X}_p)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\psi_n = (B(x, n), B'(x, n))_{x \in X} \quad \text{mit } B(x, n) = \{y \mid p(x, y) < 2^{-n}\}$$

$$\text{und } B'(x, n) = \{y \mid p(y, x) < 2^{-n}\}.$$

$(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$.

Ich zeige (a) und (b).

(a). Seien $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $y \in \text{St}^2(x, \psi_n)$ gibt es nach

Definition $v, w \in X$ mit $x \in B'(v, n)$, $B(v, n) \cap B'(w, n) \neq \emptyset$ und $y \in B(w, n)$; d.h.

$$p(x, v) < 2^{-n}, \quad p(w, y) < 2^{-n}$$

und es existiert ein $z \in B(v, n) \cap B'(w, n)$, so daß

$$p(v, z) < 2^{-n}, \quad p(z, w) < 2^{-n}$$

gilt.

Es folgt

$$p(x, z) \leq p(x, v) + p(v, z) < 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1} \quad \text{und}$$

$$p(z, y) \leq p(z, w) + p(w, y) < 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1}, \quad \text{d.h.}$$

$$x \in B'(z, n-1) \quad \text{und} \quad y \in B(z, n-1) \quad \text{und damit} \quad y \in \text{St}(x, \psi_{n-1}).$$

(b). Sei $P \in \mathcal{R}$ und $x \in P$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B(x, n) \subset P$.

Ich zeige

$$\text{St}(x, \psi_{n+1}) \subset B(x, n).$$

Sei $y \in \text{St}(x, \gamma_{n+1})$, dann gibt es ein $z \in X$ mit

$$x \in B'(z, n+1) \quad \text{und} \quad y \in B(z, n+1); \text{ d.h. } \\ p(x, z) < 2^{-(n+1)} \quad \text{und} \quad p(z, y) < 2^{-(n+1)}.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$$

und damit $y \in B(x, n)$.

(hinreichend). Ich zeige zunächst, daß man zusätzlich in 5.1 o.B.d.A

(**) Für alle Teilmengen A von X und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{St}^3(A, \gamma_n) \subset \text{St}(A, \gamma_{n-1}).$$

voraussetzen kann.

Sei $(\tilde{\gamma}_n) = (\gamma_{2n})$, $(\tilde{\gamma}_n)$ ist eine Familie offener Paarüberdeckungen von $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$.

Nach Lemma 4.5 ist $\text{St}(\cdot, \gamma_n)$ additiver Hüllenoperator auf X .

Mit Satz 3.3(3) folgt dann

$$(a) \text{St}^2(x, \tilde{\gamma}_n) = \text{St}^2(x, \gamma_{2n}) \subset \text{St}^2(x, \gamma_{2n-1}) \subset \text{St}(x, \gamma_{2n-2}) = \text{St}(x, \tilde{\gamma}_{n-1}).$$

$$(b) \text{St}(x, \tilde{\gamma}_n) = \text{St}(x, \gamma_{2n}) \subset \text{St}^2(x, \gamma_{2n}) \subset \text{St}^2(x, \gamma_{n+1}) \subset \text{St}(x, \gamma_n).$$

für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelten auch die Aussagen

(a) und (b) von Satz 5.1, wenn man γ durch $\tilde{\gamma}$ ersetzt.

Nach Satz 3.3(2) gilt

$$\text{St}^4(A, \tilde{\gamma}_n) = \text{St}^4(A, \gamma_{2n}) \subset \text{St}(A, \gamma_{2n-2}) = \text{St}(A, \tilde{\gamma}_{n-1})$$

und damit

$$(**) \text{St}^3(A, \tilde{\gamma}_n) \subset \text{St}(A, \tilde{\gamma}_{n-1}) \text{ für alle } A \subset X \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ich setze o.B.d.A. (**) voraus.

Um den folgenden Beweis übersichtlicher notieren zu können, führe ich die folgenden Abkürzungen ein: $\text{St}(\cdot, \gamma_n) = \text{St}_n$.

Zusätzlich sei $\text{St}_0: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definiert durch $\text{St}_0(A) = X$

für alle A aus $\mathcal{A}(X)$. St_0 ist additiver Hüllenoperator auf X .

Ich definiere $p: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$p(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} \mid n \in \mathbb{N}; k_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und } y \in \text{St}_{k_n} \circ \text{St}_{k_{n-1}} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x) \right\}.$$

Es gilt I. p ist Pseudo-Quasimetrik auf X .

II. $\chi_p = \mathcal{P}$ und $\chi_p \subset \mathcal{Q}$.

zu I. Seien $x, y, z \in X$. Man rechnet leicht die Eigenschaften 1.1(a), (b) und (c) nach.

(a) $p(x, y) \geq 0$ folgt sofort aus der Definition.

(b) Für jedes $x \in X$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x \in \text{St}_n(x)$, weil ψ_n Paar-Überdeckung von X ist, d.h.

$$p(x, x) \leq \inf \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \} = 0.$$

Mit (a) folgt $p(x, x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{(c) } p(x, y) + p(y, z) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} \mid n \in \mathbb{N}; k_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und } y \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x) \right\} \\ &\quad + \inf \left\{ \sum_{j=1}^m 2^{-h_j} \mid m \in \mathbb{N}; h_j \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und } z \in \text{St}_{h_m} \circ \dots \circ \text{St}_{h_1}(y) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} + \sum_{j=1}^m 2^{-h_j} \mid n, m \in \mathbb{N}; k_1, h_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und } y \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x), z \in \text{St}_{h_m} \circ \dots \circ \text{St}_{h_1}(y) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} + \sum_{j=1}^m 2^{-h_j} \mid n, m \in \mathbb{N}; k_1, h_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und } z \in \text{St}_{h_m} \circ \dots \circ \text{St}_{h_1} \circ \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} \mid n \in \mathbb{N}; k_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und } z \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x) \right\} \\ &= p(x, z). \end{aligned}$$

zu II. $\chi_p \subset \mathcal{P}$:

Sei $z \in B = \{y \mid p(x, y) < 2^{-m}\}$, dann gibt es eine Folge $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $z \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x)$ und $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i} < 2^{-m}$. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i} + 2^{-r} < 2^{-m}$.

Für $v \in \text{St}_r(z)$ gilt dann $v \in \text{St}_r \circ \text{St}_{k_n} \circ \text{St}_{k_{n-1}} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x)$, d.h. $p(x, v) \leq \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} + 2^{-r} < 2^{-m}$. Damit ist $\text{St}_r(z) \subset B$ gezeigt.

$\text{St}_r(z)$ ist eine $\mathcal{P}$ -Umgebung von z , weil ψ_n offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ist.

$\chi_p \supset \mathcal{P}$:

Sei $P \in \mathcal{P}$ und $x \in P$. Nach Voraussetzung gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\text{St}_m(x) \subset P$. Mit $(**)$ sind die Voraussetzungen von Satz 3.4 erfüllt, d.h. es gilt 3.4(*): Für jede Folge $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ natürlicher Zahlen mit $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i} < 2^{-m}$ gilt

$$\text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x) \subset \text{St}_m(x).$$

Sei $B = \{y \mid p(x, y) < 2^{-m}\}$ und $z \in B$, d.h. $p(x, z) < 2^{-m}$. Dann gibt es eine Folge $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $z \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(x)$ und $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i} < 2^{-m}$. Aus 3.4(*) folgt sofort $z \in \text{St}_m(x)$.

Damit ist $B \subset P$ gezeigt. B ist χ_p -Umgebung von x .

$\chi_p \subset \mathcal{Q}$:

Sei $B' = \{y \mid p(y, x) < 2^{-m}\}$ und $z \in B'$, d.h. $p(z, x) < 2^{-m}$. Dann gibt es nach Definitionen eine Folge $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit

$$x \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1}(z) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} < 2^{-m}.$$

Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i} + 2^{-r} < 2^{-m}$. Nach Voraussetzung ist ψ_r

Paarüberdeckung von X . Damit gibt es ein Paar $(P, Q) \in \psi_r$ mit

$z \in P \cap Q$. Für $v \in Q$ gilt $z \in P \subset \text{St}_r(v)$ und damit

$$x \in \text{St}_{k_n} \circ \dots \circ \text{St}_{k_1} \text{St}_r(v).$$

Es folgt $p(v, x) \leq \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} + 2^{-r} < 2^{-m}$. Also gibt es zu jedem $z \in B'$ ein $Q \in \mathcal{Q}$ mit $Q \subset B'$. B' ist also $\mathcal{Q}$ -offen.

5.2 Korollar. Ein bitopologischer Raum $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ist genau dann pseudo-quasimetrisierbar, wenn es eine Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen gibt mit

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ gilt

$$\text{St}^2(x, \psi_n) \subset \text{St}(x, \psi_{n-1}).$$

(ii) Zu jedem $P \in \mathcal{P}$ und $x \in P$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{St}(x, \psi_n) \subset P.$$

Zu jedem $Q \in \mathcal{Q}$ und $x \in Q$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{St}(x, \psi'_n) \subset Q.$$

Zusatz. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ist genau dann quasimetrisierbar, wenn $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ zusätzlich bi- T_0 -Raum ist.

Beweis. (notwendig). Analog wie in 5.1 zeigt man für $\psi_n = (B(x, n), B'(x, n))_{x \in X}$ die Notwendigkeit der obigen Bedingungen.

(hinreichend). I. Nach Satz 5.1 ist $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ links-pseudo-quasimetrisierbar.

II. (ψ'_n) ist offene Paarüberdeckung vom dualen Raum $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ und erfüllt die Bedingungen (a) und (b) von Satz 5.1.

zu (a). Aus (i) folgt für $z \in \text{St}^2(x, \psi'_n)$

$$x \in \text{St}^2(z, \psi_n) \subset \text{St}(z, \psi_{n-1}), \text{ d.h. } z \in \text{St}(x, \psi'_{n-1}).$$

Damit ist $\text{St}^2(x, \psi'_n) \subset \text{St}(x, \psi'_{n-1})$ gezeigt.

zu (b). (b) folgt aus (ii).

Damit ist nach Satz 5.1 der duale Raum $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ links-pseudo-quasimetrisierbar.

Nach 1.5 ist dann $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pseudo-quasimetrisierbar.

(Zusatz). Klar nach Lemma 2.5.

5.3 Korollar. (ALEXANDROFF/URYSOHN)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann pseudo-metrisierbar, wenn es eine Familie $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Überdeckungen gibt mit

(α) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ gilt

$$\text{St}^2(x, \tau_n) \subset \text{St}(x, \tau_{n-1}).$$

(β) Für jedes $P \in \mathcal{T}$ und $x \in P$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{St}(x, \tau_n) \subset P.$$

Zusatz. $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann metrisierbar, wenn $(X, \mathcal{T})$ zusätzlich T_0 -Raum ist.

($\text{St}(\cdot, \tau_n)$ bezeichnet hier den üblichen Sternbildungsoperator in der Topologie, d.h. nach 4.4 die Sternbildung bez. der Paarüberdeckung (τ_n, τ_n) (vgl. 4.2(1))).

Beweis. (notwendig). Für $\tau_n = (B(x, n))_{x \in X}$ sind die obigen Bedingungen erfüllt.

(hinreichend). $((\tau_n, \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist offene Paarüberdeckung von $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ und erfüllt die Bedingungen (a) und (b) von Satz 5.1. $(X, \mathcal{T}, \mathcal{T})$ ist damit links-pseudo-quasimetrisierbar. Nach 1.7 ist dann $(X, \mathcal{T})$ pseudo-metrisierbar.

(Zusatz). Klar.

5.4 Satz. Für einen bitopologischen Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ sind die Aussagen A. - H. äquivalent. $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ist genau dann links-pseudo-quasimetrisierbar, wenn eine der Aussagen A. - H. erfüllt ist.

A. Es gibt eine Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

$$(a) \text{St}^2(x, \psi_n) \subset \text{St}(x, \psi_{n-1})$$

$$(b) \{ \text{St}(x, \psi_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist } \mathcal{R}\text{-Umgebungsbasis von } x.$$

B. Es gibt eine Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

$$(\alpha) \{ \text{St}^2(x, \psi_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist } \mathcal{R}\text{-Umgebungsbasis von } x.$$

$$(\beta) \text{ Für jedes } x \in X \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } m = m(n, x) \text{ mit}$$

$$\text{St}^2(x, \psi'_m) \subset \text{St}(x, \psi'_n).$$

C. Zu jedem $x \in X$ gibt es zwei Familien $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(V_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{R}$ -Umgebungen von x und zwei Familien $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(V'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x mit

$$(i) \{ U_{nx} \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist } \mathcal{R}\text{-Umgebungsbasis von } x.$$

$$\text{Für jedes } x \in X \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } m = m(n, x) \text{ mit } U'_{mx} \subset V'_{nx}.$$

$$(ii) y \notin U_{nx} \implies V_{nx} \cap V'_{ny} = \emptyset$$

$$y \notin U'_{nx} \implies V'_{nx} \cap V_{ny} = \emptyset.$$

$$(iii) y \in V_{nx} \implies V_{ny} \subset U_{nx}$$

$$y \in V'_{nx} \implies V'_{ny} \subset U'_{nx}.$$

D. Es gibt eine Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen, so daß gilt

$$(a) \text{ Zu jedem } U \in \mathcal{R} \text{ und } x \in U \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \text{ und eine } \mathcal{R}\text{-Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit}$$

$$\text{St}(V, \psi_n) \subset U.$$

$$(b) \text{ Zu jedem } x \in X \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } m = m(n, x) \text{ mit}$$

$$\text{St}^2(x, \psi'_m) \subset \text{St}(x, \psi'_n).$$

E. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Familie $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x , so daß es für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $m = m(n, x)$ gibt mit

$$U_{mx} \cap U'_{my} \neq \emptyset \implies U_{my} \subset U_{nx}$$

$$U'_{mx} \cap U_{my} \neq \emptyset \implies U'_{my} \subset U'_{nx}$$

für alle $y \in X$.

F. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von x und eine Familie $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x mit

$$(\alpha) \ y \in U_{nx} \implies U_{ny} \subset U_{n-1x}$$

$$U'_{nx} \subset U'_{n-1x}.$$

$$(\beta) \ y \notin U_{n-1x} \implies U_{nx} \cap U'_{ny} = \emptyset.$$

G. Es gibt eine Familie $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(\text{St}(\cdot, \mathcal{V}_n) \times I_X) \circ \mathcal{V}_n$ Verfeinerung von $\mathcal{V}_{n-1}$.

(ii) $\{\text{St}(x, \mathcal{V}_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis von x .

(I_X bezeichnet die Identität auf $\mathcal{R}(X)$).

$\text{St}(\cdot, \mathcal{V}_n) \times I_X : \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X) \longrightarrow \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X)$ ist definiert durch

$$(\text{St}(\cdot, \mathcal{V}_n) \times I_X)(P, Q) = (\text{St}(P, \mathcal{V}_n), Q).$$

H. Es gibt eine Familie $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

$$(\alpha) \ \text{St}^2(x, \mathcal{V}_n) \subset \text{St}(x, \mathcal{V}_{n-1}).$$

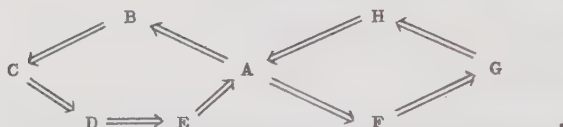
(β) Für jede Teilmenge A von X gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{St}(\overline{A}^{\mathcal{V}_n}, \mathcal{V}'_n) = \overline{A}^{\mathcal{V}}.$$

($\overline{A}^{\mathcal{V}}$ bezeichnet den $\mathcal{R}$ -Abschluß von A .)

Beweis. Die Aussage A. ist äquivalent zu der in 5.1 geforderten Bedingung. Es genügt daher, die Äquivalenz der Aussagen A. - H. zu zeigen.

Ich zeige die folgenden Implikationen:



A. $\implies$ B.. Die Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus A. erfüllt die Bedingungen (α) und (β) aus B.

(α) Aus (b) und (a) folgt $\{\text{St}^2(x, \psi_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{R}$ -Umgebungs-basis von x .

(β) Ich zeige $\text{St}^2(x, \psi'_{n+1}) \subset \text{St}(x, \psi'_n)$.

Sei $z \in \text{St}^2(x, \psi'_{n+1})$; dann folgt $x \in \text{St}^2(z, \psi_{n+1}) \subset \text{St}(z, \psi_n)$ und damit $z \in \text{St}(x, \psi'_n)$.

B. $\implies$ C.. Seien $U_{nx} = \text{St}^2(x, \psi_n)$, $V_{nx} = \text{St}(x, \psi_n)$,

$U'_{nx} = \text{St}^2(x, \psi'_n)$ und $V'_{nx} = \text{St}(x, \psi'_n)$.

(i) folgt sofort aus (α) und (β) .

(ii) Aus $y \notin U_{nx} = \text{St}^2(x, \psi_n) = \text{St}(\text{St}(x, \psi_n), \psi_n) = \text{St}(V_{nx}, \psi_n)$ folgt $V_{nx} \cap \text{St}(y, \psi'_n) = \emptyset$, d.h. $V_{nx} \cap V'_{ny} = \emptyset$.

Aus $y \notin U'_{nx} = \text{St}^2(V'_{nx}, \psi'_n)$ folgt $V'_{nx} \cap \text{St}(y, \psi_n) = V'_{nx} \cap V_{ny} = \emptyset$.

(iii) Aus $y \in V_{nx} = \text{St}(x, \psi_n)$ folgt $V_{ny} = \text{St}(y, \psi_n) \subset \text{St}^2(x, \psi_n) = U_{nx}$.

Aus $y \in V'_{nx} = \text{St}(x, \psi'_n)$ folgt $V'_{ny} = \text{St}(y, \psi'_n) \subset \text{St}^2(x, \psi'_n) = U'_{nx}$.

C. $\implies$ D. Es seien (U_{nx}) , (V_{nx}) , (U'_{nx}) und (V'_{nx})

Familien mit den Eigenschaften (i) - (iii). Ich zeige zunächst, daß man zusätzlich

$$(iv) U_{nx} \subset U_{n-1x}, V_{nx} \subset V_{n-1x}, U'_{nx} \subset U'_{n-1x} \text{ und } V'_{nx} \subset V'_{n-1x}$$

annehmen kann.

$$\text{Für } x \text{ und } n \text{ definiere ich } \tilde{U}_{nx} = \bigcap_{k \leq n} U_{kx}, \tilde{V}_{nx} = \bigcap_{k \leq n} V_{kx},$$

$$\tilde{U}'_{nx} = \bigcap_{k \leq n} U'_{kx} \text{ und } \tilde{V}'_{nx} = \bigcap_{k \leq n} V'_{kx}, \text{ so daß } \tilde{U}_{nx} \subset \tilde{U}_{n-1x},$$

$$\tilde{V}_{nx} \subset \tilde{V}_{n-1x}, \tilde{U}'_{nx} \subset \tilde{U}'_{n-1x} \text{ und } \tilde{V}'_{nx} \subset \tilde{V}'_{n-1x} \text{ gilt. Es sind } (\tilde{U}_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$$

und $(\tilde{V}_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ Familien von $\mathcal{R}$ -Umgebungen von x und $(\tilde{U}'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$

und $(\tilde{V}'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ Familien von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x , die die Bedingung C. erfüllen:

$$(i) \{ \tilde{U}_{nx} \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist } \mathcal{R}\text{-Umgebungsbasis von } x.$$

$$\text{Für } \tilde{V}'_{nx} = \bigcap_{k \leq n} V'_{kx} \text{ gibt es } m_1 = m(1, x), \dots, m_n = m(n, x) \text{ mit}$$

$$U'_{m_1 x} \subset V'_{1x}, \dots, U'_{m_n x} \subset V'_{nx}. \text{ Sei } m = \max \{ m_1, \dots, m_n \}, \text{ dann}$$

$$\text{gilt } \tilde{U}'_{mx} \subset \tilde{V}'_{nx}.$$

$$(ii) \text{ Ist } y \notin \tilde{U}_{nx} = \bigcap_{k \leq n} U_{kx}, \text{ dann gibt es ein } 1 \leq k_0 \leq n \text{ mit}$$

$$y \notin U_{k_0 x} \text{ und damit } V_{k_0 x} \cap V'_{k_0 y} = \emptyset, \text{ d.h.}$$

$$\tilde{V}_{nx} \cap \tilde{V}'_{ny} \subset V_{k_0 x} \cap V'_{k_0 y} = \emptyset.$$

$$\text{Analog zeigt man: Aus } y \notin \tilde{U}'_{nx} \text{ folgt } \tilde{V}_{nx} \cap \tilde{V}'_{ny} = \emptyset.$$

$$(iii) \text{ Sei } y \in \tilde{V}_{nx} = \bigcap_{k \leq n} V_{kx}, \text{ dann gilt für alle } k \leq n$$

$$y \in V_{kx} \text{ und damit } V_{ky} \subset U_{kx}, \text{ d.h.}$$

$$\tilde{V}_{ny} = \bigcap_{k \leq n} V_{ky} \subset \bigcap_{k \leq n} U_{kx} = \tilde{U}_{nx}.$$

$$\text{Analog zeigt man: Aus } y \in \tilde{V}'_{nx} \text{ folgt } \tilde{V}'_{ny} \subset \tilde{U}'_{nx}.$$

Ich setze daher o.B.d.A. (iv) voraus.

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n = (\hat{V}_{nx}, \hat{V}'_{nx})_{x \in X}$, wobei $\hat{V}_{nx}$ der $\mathcal{R}$ -offene Kern

von V_{nx} und $\hat{V}'_{nx}$ der $\mathcal{Q}$ -offene Kern von V'_{nx} ist. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ist eine Familie offener Paarüberdeckungen, wobei nach (iv) für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{V}_n$ Verfeinerung von $\mathcal{V}_{n-1}$ ist. Für $(\mathcal{V}_n)$ gelten die Bedingungen (a) und (b) von D..

(a) Sei $U \in \mathcal{V}$ und $x_0 \in U$. Nach (i) gibt es ein n_1 mit $U_{n_1 x_0} \subset U$ und ein n_2 mit $U_{n_2 x_0} \subset V_{n_1 x_0}$. $V_{n_2 x_0}$ ist eine $\mathcal{V}$ -Umgebung von x_0 .

Ich zeige

$$\text{St}(V_{n_2 x_0}, \mathcal{V}_{n_2}) \subset U.$$

Sei $\emptyset \neq V_{n_2 x_0} \cap \mathring{V}_{n_2 y} \subset V_{n_2 x_0} \cap V'_{n_2 y}$ für ein $y \in X$, dann ist nach (ii) $y \in U_{n_2 x_0} \subset V_{n_1 x_0}$ und nach (iii) gilt

$$V_{n_1 y} \subset U_{n_1 x_0} \subset U.$$

Es genügt noch $\mathring{V}_{n_2 y} \subset V_{n_1 y}$ zu zeigen. Aus (iii) folgt

$$V_{n_1 x_0} \subset U_{n_1 x_0} \quad \text{und damit gelten die Inklusionen}$$

$$U_{n_2 x_0} \subset V_{n_1 x_0} \subset U_{n_1 x_0}.$$

Aus (iv) folgt dann $n_2 \geq n_1$ und damit $V_{n_2 y} \subset V_{n_1 y}$ also $\mathring{V}_{n_2 y} \subset V_{n_1 y}$.

Eine ähnliche Betrachtung liefert.

(b) Sei $x_0 \in X$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\mathring{V}'_{n x_0} \subset \text{St}(x_0, \mathcal{V}'_n)$. Nach (i)

gibt es ein n_1 mit $U'_{n_1 x_0} \subset V'_{n x_0}$ und ein n_2 mit $U'_{n_2 x_0} \subset V'_{n_1 x_0}$.

Ich zeige zunächst

$$(\alpha) \quad \text{St}(V'_{n_2}, \mathcal{V}'_{n_2}) \subset \text{St}(x_0, \mathcal{V}'_n).$$

Sei $\emptyset \neq V'_{n_2 x_0} \cap \mathring{V}'_{n_2 y} \subset V'_{n_2 x_0} \cap V'_{n_2 y}$ für ein $y \in X$, dann ist

nach (ii) $y \in U'_{n_2 x_0} \subset V'_{n_1 x_0}$ und nach (iii) gilt $\mathring{V}'_{n_1 y} \subset \mathring{U}'_{n_1 x_0}$.

Da $\mathring{U}'_{n_1 x_0} \subset \text{St}(x_0, \mathcal{V}'_n)$ genügt es noch $\mathring{V}'_{n_2 y} \subset \mathring{V}'_{n_1 y}$ zu zeigen.

Mit (iii) folgt $U'_{n_2 x_0} \subset V'_{n_1 x_0} \subset U'_{n_1 x_0}$. Aus (iv) folgt dann

$n_2 \geq n_1$ und damit $V'_{n_2 y} \subset V'_{n_1 y}$ also $\mathring{V}'_{n_2 y} \subset \mathring{V}'_{n_1 y}$.

Analog schließe ich weiter. Es gibt ein n_3 mit $U'_{n_3 x_0} \subset V'_{n_2 x_0}$

und ein n_4 mit $U'_{n_4 x_0} \subset V'_{n_3 x_0}$.

Ich zeige zunächst

$$(\beta) \text{ St}(V'_{n_4 x_0}, \psi'_{n_4}) \subset V'_{n_2 x_0}.$$

Sei $\emptyset \neq V'_{n_4 x_0} \cap \hat{V}_{n_4 y} \subset V'_{n_4 x_0} \cap V_{n_4 y}$ für ein $y \in X$, dann ist nach

$$(ii) \ y \in U'_{n_4 x_0} \subset V'_{n_3 x_0} \text{ und nach (iii) gilt } V'_{n_3 y} \subset U'_{n_3 x_0} \subset V'_{n_2 x_0}.$$

Aus $U'_{n_4 x_0} \subset V'_{n_3 x_0} \subset U'_{n_3 x_0}$ folgt $n_4 \geq n_3$ und damit $V'_{n_4 y} \subset V'_{n_2 y}$.

Ich zeige zuletzt

$$(\gamma) \text{ St}^2(x_0, \psi'_{n_4}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_n).$$

Aus $V'_{n_4 x_0} \subset U'_{n_3 x_0} \subset V'_{n_2 x_0}$ folgt $n_4 \geq n_2$, d.h. ψ'_{n_4} ist Verfeinerung

von ψ'_{n_2} . Aus (α) folgt damit $\text{St}(V'_{n_2 x_0}, \psi'_{n_4}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_n)$.

Nach (β) ist $\text{St}(x_0, \psi'_{n_4}) \subset V'_{n_2 x_0}$ und es gilt dann

$$\text{St}^2(x_0, \psi'_{n_4}) \subset \text{St}(V'_{n_2 x_0}, \psi'_{n_4}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_n).$$

$$D. \implies E. \text{ Sei } U_{nx} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{St}(x, \psi_k) \text{ und}$$

$$U'_{nx} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{St}(x, \psi'_k). \{U'_{nx} \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ ist eine Familie von } \mathcal{Q}\text{-Um-}$$

gebungen von x und $\{U_{nx} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nach (a) eine $\mathcal{K}$ -Umgebungs-
basis von x .

Sei $x_0 \in X$ und $n_0 \in \mathbb{N}$.

(i). Nach (a) gibt es $r, s, t \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{St}(\text{St}(x_0, \psi_r), \psi_s) \subset U_{n_0 x_0}.$$

Sei $m_1 = \max \{r, s, t\}$, dann gilt $U_{m_1 x_0} \subset \text{St}(x_0, \psi_r)$ und damit

$$\text{St}(\text{St}(U_{m_1 x_0}, \psi_s), \psi_t) \subset U_{n_0 x_0}.$$

Ich zeige

$$U_{m_1 x_0} \cap U'_{m_1 y} \neq \emptyset \implies U_{m_1 y} \subset U_{n_0 x_0} \text{ für alle } y \in X.$$

$$\text{Sei } \emptyset \neq U_{m_1 x_0} \cap U'_{m_1 y} = U_{m_1 x_0} \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{St}(y, \psi'_k) \right) \subset U_{m_1 x_0} \cap \text{St}(y, \psi'_s),$$

dann folgt $y \in \text{St}(U_{m_1 x_0}, \psi_s)$ und damit

$$\text{St}(y, \psi_t) \subset \text{St}(\text{St}(U_{m_1 x_0}, \psi_s), \psi_t) \subset U_{n_0 x_0}.$$

Aus $U_{m_1 y} = \bigcap_{k \leq m_1} \text{St}(y, \psi_k) \subset \text{St}(y, \psi_t)$ folgt sofort $U_{m_1 y} \subset U_{n_0 x_0}$.

(ii). Nach (b) gibt es zu jedem $1 \leq k \leq n_0$ ein $m_k = m(k, x_0)$ mit $\text{St}^2(x_0, \psi'_{m_k}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_k)$ und ein $m_k = m(m_k, x_0)$ mit $\text{St}^2(x_0, \psi'_{m_k}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_{m_k})$.

Ich zeige zunächst

$$U'_{m_k x_0} \cap U_{m_k y} \neq \emptyset \implies \text{St}(y, \psi'_{m_k}) \cap \text{St}(x_0, \psi'_k) \text{ für alle } y \in X \text{ und } 1 \leq k \leq n_0.$$

Aus $\emptyset \neq U'_{m_k x_0} \cap U_{m_k y} \subset \text{St}(x_0, \psi'_{m_k}) \cap \text{St}(y, \psi'_{m_k})$ folgt

$y \in \text{St}^2(x_0, \psi'_{m_k}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_k)$ und damit

$$\text{St}(y, \psi'_{m_k}) \subset \text{St}^2(x_0, \psi'_{m_k}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_k) \text{ für alle } 1 \leq k \leq n_0.$$

Sei weiterhin $m_2 = \max \{m_1, \dots, m_{n_0}, m_1, \dots, m_{n_0}\}$ und $y \in X$. Aus

$U'_{m_2 x_0} \cap U_{m_2 y} \neq \emptyset$ folgt dann $U'_{m_k x_0} \cap U_{m_k y} \neq \emptyset$ für alle $1 \leq k \leq n_0$

und damit $\text{St}(y, \psi'_{m_k}) \subset \text{St}(x_0, \psi'_k)$ für alle $1 \leq k \leq n_0$. Es folgt

$$U'_{m_2 y} = \bigcap_{k \leq m_2} \text{St}(y, \psi'_k) \subset \bigcap_{k \leq n_0} \text{St}(y, \psi'_{m_k}) \subset \bigcap_{k \leq n_0} \text{St}(x_0, \psi'_k) = U'_{n_0 x_0}.$$

(iii) Sei $m = m(n_0, x_0) = \max \{m_1, m_2\}$ und $y \in X$.

Aus $\emptyset \neq U_{m x_0} \cap U_{m y} \subset U_{m_1 x_0} \cap U_{m_1 y}$ folgt nach (i) $U_{m y} \subset U_{m_1 y} \subset U_{n_0 x_0}$.

Aus $\emptyset \neq U_{m x_0} \cap U_{m y} \subset U'_{m_2 x_0} \cap U_{m_2 y}$ folgt nach (ii) $U_{m y} \subset U'_{m_2 y} \subset U'_{n_0 x_0}$.

E. $\implies$ A. Ich zeige zunächst, daß in E. o.B.d.A. für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$

(α) U_{nx} ist $\mathcal{P}$ -offen und U'_{nx} ist $\mathcal{Q}$ -offen.

(β) $U_{nx} \subset U_{n-1x}$ und $U'_{nx} \subset U'_{n-1x}$.

(γ) $m(n, x) \geq n$.

vorausgesetzt werden kann.

zu (α). Ist für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{U}_{nx}$ der $\mathcal{P}$ -offene Kern von U_{nx} und $\tilde{U}'_{nx}$ der $\mathcal{Q}$ -offene Kern von U'_{nx} , dann ist $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{P}$ -Umgebungsbasis von x und $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x .

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ und $m = m(n_0, x_0)$. Für jedes $y \in Y$ folgt aus $\emptyset \neq \tilde{U}_{mx_0} \cap \tilde{U}'_{my} \subset U_{mx_0} \cap U'_{my}$ nach E. $U_{my} \subset U_{n_0 x_0}$ und damit $\tilde{U}_{my} \subset \tilde{U}_{n_0 x_0}$ und aus $\emptyset \neq \tilde{U}'_{mx_0} \cap \tilde{U}'_{my} \subset U'_{mx_0} \cap U'_{my}$: $U'_{my} \subset U'_{n_0 x_0}$ und damit $\tilde{U}'_{my} \subset \tilde{U}'_{n_0 x_0}$.

zu (β). Seien $\tilde{U}_{nx}$ und $\tilde{U}'_{nx}$ für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $\tilde{U}_{nx} = \bigcap_{k \leq n} U_{kx}$ und $\tilde{U}'_{nx} = \bigcap_{k \leq n} U'_{kx}$, dann gilt $\tilde{U}_{nx} \subset \tilde{U}_{n-1x}$, $U'_{nx} \subset U'_{n-1x}$ und $(\tilde{U}_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\mathcal{P}$ -Umgebungsbasis von x und $(\tilde{U}'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Familie von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x .

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$. Für jedes $1 \leq k \leq n_0$ gibt es ein $m_k = m(k, n_0)$, so daß für alle $y \in X$ aus $U_{m_k x_0} \cap U'_{m_k y} \neq \emptyset$ $U_{m_k y} \subset U_{k x_0}$ und aus $U'_{m_k x_0} \cap U_{m_k y} \neq \emptyset$ $U'_{m_k y} \subset U'_{k x_0}$ folgt.

Sei $m = \max \{m_1, \dots, m_{n_0}\}$, dann folgt für alle $y \in X$ aus

$\tilde{U}_{mx_0} \cap \tilde{U}'_{my} \neq \emptyset$ $U_{m_k x_0} \cap U'_{m_k y} \neq \emptyset$ für alle $1 \leq k \leq n_0$ und damit auch $U_{m_k y} \subset U_{k x_0}$ für alle $1 \leq k \leq n_0$. Es gilt

$$\tilde{U}_{my} = \bigcap_{k \leq m} U_{ky} \subset \bigcap_{k \leq n_0} U_{m_k y} \subset \bigcap_{k \leq n_0} U_{k x_0} = \tilde{U}_{n_0 x_0}.$$

Analog erhalte ich für alle $y \in X$:

$$\text{Aus } \tilde{U}'_{mx_0} \cap \tilde{U}_{my} \neq \emptyset \text{ folgt } \tilde{U}'_{my} \subset \tilde{U}'_{n_0 x_0}.$$

zu (γ). Ich setze (β) voraus.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und $m = m(n, x)$. Es gilt $x \in U_{mx} \cap U'_{mx} \neq \emptyset$, so daß aus E. $U_{mx} \subset U_{nx}$ folgt. Aus (β) folgt $m(n, x) = m \geq n$.

Ich setze o.B.d.A. (α), (β) und (γ) voraus.

Ich definiere für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ $r_n(x)$ rekursiv durch

$$r_1(x) = 1, \quad r_2(x) = m(1, x), \quad r_3(x) = m(2, x), \quad \dots, \quad r_n(x) = m(r_{n-1}(x), x).$$

Sei für jedes n $\psi_n = (U_{r_n(x)} x, U'_{r_n(x)} x)_{x \in X}$. Nach (α) ist

$(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Paarüberdeckung.

(a) Ich zeige $\text{St}^2(x, \psi_n) \subset \text{St}(x, \psi_{n-1})$.

Sei $x \in U'_{r_n(y)} y$ und $U_{r_n(y)} y \cap U'_{r_n(z)} z \neq \emptyset$ für $y, z \in X$.

Es ist $U_{r_n(z)} z \subset \text{St}(x, \psi_{n-1})$ zu zeigen.

1. Fall. $r_n(y) \geq r_n(z)$.

Es gilt nach (β) $\emptyset \neq U_{r_n(y)} y \cap U'_{r_n(z)} z \subset U_{r_n(z)} y \cap U'_{r_n(z)} z$.

Aus E. folgt $U'_{r_n(z)} y \subset U'_{r_{n-1}(z)} z$ und mit (β) $U'_{r_n(y)} y \subset U'_{r_n(z)} y$.

Aus $x \in U'_{r_n(y)} y \subset U'_{r_{n-1}(z)} z$ folgt $U_{r_{n-1}(z)} z \subset \text{St}(x, \psi_{n-1})$.

Mit (β) gilt $U_{r_n(z)} z \subset U_{r_{n-1}(z)} z \subset \text{St}(x, \psi_{n-1})$.

2. Fall. $r_n(y) < r_n(z)$.

Es gilt nach (β) $\emptyset \neq U_{r_n(y)} y \cap U'_{r_n(z)} z \subset U_{r_n(y)} y \cap U'_{r_n(y)} z$.

Aus E. folgt $U_{r_n(y)} z \subset U_{r_{n-1}(y)} y$ und mit (β)

$U_{r_n(z)} z \subset U_{r_n(y)} z \subset U_{r_{n-1}(y)} y$. Es gilt $x \in U'_{r_n(y)} y \subset U'_{r_{n-1}(y)} y$

und damit $U_{r_n(z)} z \subset U_{r_{n-1}(y)} y \subset \text{St}(x, \psi_{n-1})$.

(b) Sei $U \in \mathcal{T}$ und $x_0 \in U$. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0

mit $U_{n_0 x_0} \subset U$ und ein $m = m(n_0, x_0)$, so daß für alle $y \in X$

aus $U_{mx_0} \cap U'_{my} \neq \emptyset$ $U_{my} \subset U_{n_0 x_0}$ folgt.

Ich zeige $\text{St}(x, \psi_m) \subset U_{n_0 x_0}$.

Sei $x \in U'_{r_m(y)} y$ für ein $y \in X$. Es ist $U_{r_m(y)} y \subset U_{n_0 x_0}$ zu

zeigen. Aus $x \in U'_{r_m(y)} y$ folgt $x \in U_{r_m(x)} x \cap U_{r_m(y)} y \neq \emptyset$.

Nach (γ) ist $r_m(x) \geq m$, $r_m(y) \geq m$, so daß mit (β)

$U_{mx} \cap U'_{my} \neq \emptyset$ und damit $U_{r_m(y)y} \subset U_{my} \subset U_{n_0 x_0}$ folgt.

A. $\implies$ F. Sei für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ $U_{nx} = St(x, \psi_n)$ und $U'_{nx} = St(x, \psi'_n)$. Dann ist $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x und nach (b) $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{P}$ -Umgebungsbasis von x .

(α) Aus $y \in U_{nx} = St(x, \psi_n)$ folgt

$$U_{ny} = St(y, \psi_n) \subset St^2(x, \psi_n) \subset St(x, \psi_{n-1}) = U_{n-1x}.$$

Aus $y \in U'_{nx} = St(x, \psi'_n)$ folgt $x \in St(y, \psi_n) \subset St^2(y, \psi_n) \subset St(y, \psi_{n-1})$,

d.h. $y \in St(x, \psi'_{n-1}) = U'_{n-1x}$.

(β) Aus $U_{nx} \cap U'_{ny} = St(x, \psi_n) \cap St(y, \psi'_n) \neq \emptyset$ folgt

$$y \in St^2(x, \psi_n) \subset St(x, \psi_{n-1}) = U_{n-1x}.$$

F. $\implies$ G. Sei für $n \in \mathbb{N}$ $\psi_n = (\overset{\circ}{U}_{2nx}, \overset{\circ}{U}'_{2nx})_{x \in X}$, wobei $\overset{\circ}{U}_{2nx}$ der $\mathcal{P}$ -offene Kern von U_{2nx} und $\overset{\circ}{U}'_{2nx}$ der $\mathcal{Q}$ -offene Kern von U'_{2nx} ist. $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Familie offener Paarüberdeckungen.

(i). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$. Ich zeige

$$(St(., \psi_n) \times I_X)(\overset{\circ}{U}_{2nx}, \overset{\circ}{U}'_{2nx}) \subset \overset{\circ}{U}_{2n-2x} \times \overset{\circ}{U}'_{2n-2x}.$$

Sei $z \in St(\overset{\circ}{U}_{2nx}, \psi_n)$, dann gibt es ein $y \in X$ mit $\overset{\circ}{U}_{2nx} \cap \overset{\circ}{U}'_{2ny} \neq \emptyset$ und $z \in \overset{\circ}{U}_{2ny}$. Aus $\emptyset \neq \overset{\circ}{U}_{2nx} \cap \overset{\circ}{U}'_{2ny} \subset U_{2nx} \cap U'_{2ny}$ folgt nach (β) $y \in U_{2n-1x}$ und nach (α) $U_{2n-1y} \subset U_{2n-2x}$. Weiter folgt aus (α) $U_{2ny} \subset U_{2n-1y}$ und damit $z \in \overset{\circ}{U}_{2ny} \subset \overset{\circ}{U}_{2n-2x}$.

Aus (λ) folgt $U'_{2nx} \subset U'_{2n-2x}$ und damit $\overset{\circ}{U}'_{2nx} \subset \overset{\circ}{U}'_{2n-2x}$.

(ii). Sei U eine $\mathcal{P}$ -Umgebung von x . Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{U}_{2nx} \subset U$.

Ich zeige $St(x, \psi_{n+1}) \subset \overset{\circ}{U}_{2nx}$.

Sei $z \in St(x, \psi_{n+1})$, dann gibt es ein $y \in X$ mit $x \in \overset{\circ}{U}_{2n+2y}$ und

$z \in \overset{\circ}{U}_{2n+2y}$. Es gilt $x \in U_{2n+2x} \cap U'_{2n+2y} \neq \emptyset$ und damit $y \in U_{2n+1x}$

und $U_{2n+1y} \subset U_{2nx}$. Aus der ersten Zeile von (α) folgt für $x = y$
 $U_{2n+2y} \subset U_{2n+1y}$ und damit $z \in U_{2n+2y} \subset U_{2nx}$.

$G. \Rightarrow H.$ Sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in G.

(α) Sei $z \in \text{St}^2(x, \psi_n)$, dann gibt es (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2) aus
 Bild ψ_n mit $x \in Q_1$, $P_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ und $z \in P_2$. Daraus folgt
 $z \in \text{St}(P_1, \psi_n)$. Nach (i) gibt es ein Paar $(P, Q) \in \text{Bild } \psi_{n-1}$
 mit

$$\text{St}(P_1, \psi_n) \times Q_1 \subset P \times Q.$$

Es gilt $(z, x) \in P \times Q$ und damit $z \in \text{St}(x, \psi_{n-1})$.

(β) Sei A eine Teilmenge von X und $y \notin \overline{A}^{\mathcal{K}}$. Dann ist $X \setminus \overline{A}^{\mathcal{K}}$
 eine $\mathcal{K}$ -Umgebung von y. Nach (ii) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
 $\text{St}(y, \psi_{n_0}) \subset X \setminus \overline{A}^{\mathcal{K}}$, d.h. $\text{St}(y, \psi_{n_0}) \cap A = \emptyset$ bzw.

$$y \notin \text{St}(A, \psi'_{n_0}) \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{St}(\overline{A}^{\mathcal{K}}, \psi'_n).$$

Es ist $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{St}(\overline{A}^{\mathcal{K}}, \psi'_n)$ gezeigt.

$H. \Rightarrow A.$ Sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in H.

(a) ist identisch mit (α).

(b) Sei $P \in \mathcal{K}$ und $x_0 \in P$. Dann ist $X \setminus P$ $\mathcal{K}$ -abgeschlossen und
 es gibt nach (β) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \notin \text{St}(X \setminus P, \psi'_{n_0})$, d.h.
 $\text{St}(x_0, \psi_{n_0}) \cap (X \setminus P) = \emptyset$ bzw. $\text{St}(x_0, \psi_{n_0}) \subset P$.

5.5 Korollar. Ein bitopologischer Raum $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ist genau dann pseudo-quasimetrisierbar, wenn eine der folgenden Aussagen A. - H. erfüllt ist.

A. Es gibt eine Familie $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

$$(a) \text{ St}^2(x, \gamma_n) \subset \text{St}(x, \gamma_{n-1})$$

(b) $\{\text{St}(x, \gamma_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis von x .

$\{\text{St}(x, \gamma'_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis von x .

B. Es gibt eine Familie $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

(α) $\{\text{St}^2(x, \gamma_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis von x .

(β) $\{\text{St}^2(x, \gamma'_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis von x .

C. Zu jedem $x \in X$ gibt es zwei Familien $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(V_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{R}$ -Umgebungen von x und zwei Familien $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(V'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x mit

(i) $\{U_{nx} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis von x .

$\{U'_{nx} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis von x .

$$(ii) \quad y \notin U_{nx} \implies V_{nx} \cap V'_{ny} = \emptyset$$

$$y \notin U'_{nx} \implies V'_{nx} \cap V_{ny} = \emptyset.$$

$$(iii) \quad y \in V_{nx} \implies V_{ny} \subset U_{nx}$$

$$y \in V'_{nx} \implies V'_{ny} \subset U'_{nx}.$$

D. Es gibt eine Familie $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen, so daß gilt

(a) Zu jedem $U \in \mathcal{R}$ und $x \in U$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine $\mathcal{R}$ -Umgebung V von x mit

$$\text{St}(V, \gamma_n) \subset U.$$

(b) Zu jedem $U' \in \mathcal{Q}$ und $x \in U'$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung V' von x mit

$$\text{St}(V', \gamma'_n) \subset U'.$$

E. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und eine $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von x , so daß es für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $m = m(n, x)$ gibt mit

$$U_{mx} \cap U'_{my} \neq \emptyset \implies U_{my} \subset U_{nx}$$

$$U'_{mx} \cap U_{my} \neq \emptyset \implies U'_{my} \subset U'_{nx}$$

für alle $y \in X$.

F. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und eine $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis $(U'_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von x mit

$$(\alpha) \quad y \in U_{nx} \implies U_{ny} \subset U_{n-1x}$$

$$y \in U'_{nx} \implies U'_{ny} \subset U'_{n-1x}.$$

$$(\beta) \quad y \notin U_{n-1x} \implies U_{nx} \cap U'_{ny} = \emptyset$$

$$y \notin U'_{n-1x} \implies U'_{nx} \cap U_{ny} = \emptyset.$$

G. Es gibt eine Familie $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(\text{St}(\cdot, \gamma_n) \times \text{St}(\cdot, \gamma'_n)) \circ \gamma_n$ Verfeinerung von γ_{n-1} . (d.h. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Stern-Paarverfeinerung.)

(ii) $\{\text{St}(x, \gamma_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis von x .

$\{\text{St}(x, \gamma'_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis von x .

H. Es gibt eine Familie $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Paarüberdeckungen mit

$$(\alpha) \quad \text{St}^2(x, \gamma_n) \subset \text{St}(x, \gamma_{n-1})$$

(β) Für jede Teilmenge A von X gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{St}(\overline{A}^{\mathcal{R}}, \gamma'_n) = \overline{A}^{\mathcal{R}} \quad \text{und}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{St}(\overline{A}^{\mathcal{Q}}, \gamma_n) = \overline{A}^{\mathcal{Q}}.$$

($\overline{A}^{\mathcal{Q}}$ bezeichnet den $\mathcal{Q}$ -Abschluß von A .)

Zusatz. $(X, \mathcal{K}, \mathcal{Q})$ ist genau dann quasimetrisierbar, wenn eine der obigen Aussagen erfüllt ist und $(X, \mathcal{K}, \mathcal{Q})$ zusätzlich Bi- T_0 -Raum ist.

Beweis. (notwendig). Für A, B, D, G und H erfüllt $\psi_n = (B(x, 2n), B'(x, 2n))_{x \in X}$ die geforderten Bedingungen. E und F sind für $U_{nx} = B(x, n)$ und $U'_{nx} = B'(x, n)$ erfüllt. Die Umgebungen $U_{nx} = B(x, n)$, $V_{nx} = B(x, n+1)$, $U'_{nx} = B'(x, n)$ und $V'_{nx} = B'(x, n+1)$ liefern die Notwendigkeit von C.

(hinreichend). Nach 5.4 ist jeweils der Raum $(X, \mathcal{K}, \mathcal{Q})$ und der duale Raum $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{K})$ links-pseudo-quasimetrisierbar. (Beachte: Die Aussagen 5.5 A.(a) und 5.5 H.(α) sind selbstdual (vgl. Beweis zu 5.4, $A. \Rightarrow B., (\beta)$)).

Nach 1.5 ist dann $(X, \mathcal{K}, \mathcal{Q})$ pseudo-quasimetrisierbar.

(Zusatz). Klar nach Lemma 2.5.

Im übrigen lassen sich die Äquivalenzen der Aussagen A. - H. analog zu 5.4 auch direkt zeigen.

5.6 Korollar. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{K})$ ist genau dann pseudo-metrisierbar, wenn eine der folgenden Aussagen A. - H. erfüllt ist.

A.(ALEXANDROFF/URYSOHN). Es gibt eine Familie $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Überdeckungen mit

$$(a) \text{St}^2(x, \tau_n) \subset \text{St}(x, \tau_{n-1})$$

$$(b) \{ \text{St}(x, \tau_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist Umgebungsbasis von } x.$$

B.(MORITA). Es gibt eine Familie $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Überdeckungen mit

$$\{ \text{St}^2(x, \tau_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist Umgebungsbasis von } x.$$

C. (NAGATA). Zu jedem $x \in X$ gibt es zwei Familien $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(V_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen von x mit

(i) $\{U_{nx} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist Umgebungsbasis von x .

(ii) $y \notin U_{nx} \implies V_{nx} \cap V_{ny} = \emptyset$.

(iii) $y \in V_{nx} \implies V_{ny} \subset U_{nx}$.

D. (ARHANGELSKI). Es gibt eine Familie $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Überdeckungen, so daß gilt:

Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ und $x \in U$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung V von x mit

$$\text{St}(V, \tau_n) \subset U.$$

E. (FRINK). Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebungsbasis $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von x , so daß es zu jedem $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $m = m(n, x)$ gibt mit

$$U_{mx} \cap U_{my} \neq \emptyset \implies U_{my} \subset U_{nx}$$

für alle $y \in X$.

F. (WILLARD). Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebungsbasis $(U_{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ von x mit

$$(\alpha) \ y \in U_{nx} \implies U_{ny} \subset U_{n-1x}$$

$$(\beta) \ y \notin U_{n-1x} \implies U_{nx} \cap U_{ny} = \emptyset.$$

G. Es gibt eine Familie $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Überdeckungen mit

(i) $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Sternverfeinerung.

(ii) $\{\text{St}(x, \tau_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist Umgebungsbasis von x .

H. Es gibt eine Familie $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Überdeckungen mit

$$(\alpha) \ \text{St}^2(x, \tau_n) \subset \text{St}(x, \tau_{n-1})$$

(\beta) Für jede Teilmenge A von X gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{St}(\bar{A}, \tau_n) = \bar{A}.$$

Zusatz. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{P})$ ist genau dann metrisierbar, wenn eine der obigen Aussagen erfüllt ist und er zusätzlich T_0 -Raum ist.

Beweis. Analog zum Beweis 5.3.

Im übrigen lassen sich die Äquivalenzen der Aussagen A. - H. direkt - analog zum Beweis von 5.4 - zeigen.

6. Über eine Frage von C.W.PATTY.

6.1 Definitionen. $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ bezeichnet einen bitopologischen Raum.

(1) Sei $f: X \longrightarrow [0, 1]$ eine Abbildung. Seien $\mathcal{T}(\cdot, 1]$, $\mathcal{T}[0, \cdot)$ die durch $\mathcal{T}(\cdot, 1] = \{(a, 1] \mid 0 \leq a < 1\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$ und $\mathcal{T}[0, \cdot) = \{[0, a) \mid 0 < a \leq 1\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$ definierten Topologien auf $[0, 1]$.

(a) f heißt $\mathcal{R}$ -unterhalb-stetig, wenn

$$f: (X, \mathcal{R}) \longrightarrow ([0, 1], \mathcal{T}(\cdot, 1]) \text{ stetig ist}$$

(b) f heißt $\mathcal{Q}$ -oberhalb-stetig, wenn

$$f: (X, \mathcal{Q}) \longrightarrow ([0, 1], \mathcal{T}[0, \cdot)) \text{ stetig ist.}$$

(2) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt bi-regulär, wenn jeder Punkt aus X eine $\mathcal{R}$ -Umgebungsbasis von $\mathcal{Q}$ -abgeschlossenen Mengen und eine $\mathcal{Q}$ -Umgebungsbasis von $\mathcal{R}$ -abgeschlossenen Mengen besitzt.

(3) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt bi-normal, wenn es zu jedem Paar $(A, B) \in X \times X$ mit A $\mathcal{R}$ -abgeschlossen, B $\mathcal{Q}$ -abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$ eine $\mathcal{R}$ -Umgebung B' von B und eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung A' von A mit $A' \cap B' = \emptyset$ gibt.

(4) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ heißt bi-perfekt-normal, wenn gilt

(a) $(X, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ist bi-normal.

(b) Jede $\mathcal{R}$ -abgeschlossene Menge ist Durchschnitt von abzählbar vielen $\mathcal{Q}$ -offenen Mengen. Jede $\mathcal{Q}$ -abgeschlossene Menge ist Durchschnitt von abzählbar vielen $\mathcal{R}$ -offenen Mengen.

(5) Sei I eine Menge. Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X heißt $\mathcal{Q}$ -lokalendlich, wenn es zu jedem Punkt x_0 aus X eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung Q von x_0 gibt, so daß

$$\{i \mid i \in I \text{ und } Q \cap U_i \neq \emptyset\} \text{ endlich ist.}$$

(6) Sei I eine Menge. Eine Familie $(U_{i,n})_{(i,n) \in I \times \mathbb{N}}$ von Teilmengen von X heißt

(a) σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendlich, wenn für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ $(U_{i,n_0})_{i \in I}$ $\mathcal{Q}$ -lokalendlich ist.

(b) $\mathcal{P}$ -Basis, wenn $\{U_{i,n} \mid (i,n) \in I \times \mathbb{N}\}$ eine Basis für $\mathcal{P}$ ist.

Vgl. [5], [13], [12].

Bemerkung. Analog werden die Begriffe „ $\mathcal{P}$ -lokalendlich“, „ σ - $\mathcal{P}$ -lokalendlich“ und „ $\mathcal{Q}$ -Basis“ definiert.

6.2 Satz. Ist $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ein bi-regulärer Raum mit σ - $\mathcal{Q}$ -lokalendlicher $\mathcal{P}$ -Basis und σ - $\mathcal{P}$ -lokalendlicher $\mathcal{Q}$ -Basis, dann ist $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pseudo-quasimetrisierbar.

Beweis.

I. Ich zeige zunächst:

Zu jeder $\mathcal{P}$ -offenen Menge P gibt es eine Abbildung $f: X \rightarrow [0, 1]$, so daß gilt

(i) $f[P] \subset (0, 1]$ und $f[X \setminus P] \subset \{0\}$.

(ii) f ist $\mathcal{P}$ -unterhalb-stetig und $\mathcal{Q}$ -oberhalb-stetig.

Sei $P \in \mathcal{P}$. Nach Patty [13; Theorem 3.5] ist $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ bi-perfekt-normal. Sei $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie $\mathcal{Q}$ -offener Mengen mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n = X \setminus P.$$

Es gilt $X \setminus P \cap X \setminus Q_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. nach Kelley [5;

Theorem 2.7] gibt es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $f_{n_0}: X \rightarrow [0, 1]$ mit

(α) $f_{n_0}[X \setminus P] \subset \{0\}$ und $f_{n_0}[X \setminus Q_{n_0}] \subset \{1\}$.

(β) f_{n_0} ist $\mathcal{P}$ -unterhalb-stetig und $\mathcal{Q}$ -oberhalb-stetig.

$f: X \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $f(x) = 2^{-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} f_n(x)$ er-

füllt die Eigenschaften (i) und (ii).

II. Ich zeige $(X, \mathcal{P}, Q)$ ist links-pseudo-quasimetrisierbar.

Sei $(U_{i,n})_{(i,n) \in I \times \mathbb{N}}$ σ - Q -lokalendliche $\mathcal{P}$ -Basis.

Nach I. gibt es zu jedem $U_{i,n}$ eine $\mathcal{P}$ -unterhalb-stetige und Q -oberhalb-stetige Abbildung $f_{i,n}: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f_{i,n}[U_{i,n}] \subset (0, 1]$ und $f_{i,n}[X \setminus U_{i,n}] \subset \{0\}$.

$p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x, y) = \sup(\{2^{-n}(f_{i,n}(x) - f_{i,n}(y)) \mid (i, n) \in I \times \mathbb{N}\} \cup \{0\})$$

ist Pseudo-Quasimetrik auf X . Es gilt

$$(a) \chi_p \subset \mathcal{P}.$$

Sei $z_0 \in B = \{y \mid p(x_0, y) < r\}$. Sei $M \in \mathbb{N}$ mit $p(x_0, z_0) + 2^{-M} < r$.

Für jedes $n_0 \in M$ ist $(U_{i,n})_{i \in I}$ Q -lokalendlich und damit punktendlich, d.h.

$$K = \{(i, n) \mid (i, n) \in I \times \{1, 2, \dots, M\} \text{ und } z_0 \in U_{i,n}\}$$

ist endlich.

Aufgrund der $\mathcal{P}$ -unterhalb-Stetigkeit von $f_{i,n}$ für jedes (i, n)

ist

$$P = \bigcap_{(i,n) \in K} f_{i,n}^{-1}[(f_{i,n}(z_0) - 2^{-M}, 1]]$$

als endlicher Durchschnitt $\mathcal{P}$ -offener Mengen $\mathcal{P}$ -offen. P ist $\mathcal{P}$ -Umgebung von z_0 .

Ich zeige $P \subset B$.

Sei $y \in P$, dann gilt

$$(\alpha) \sup \{2^{-n}(f_{i,n}(z_0) - f_{i,n}(y)) \mid (i, n) \in K\} \leq 2^{-M}$$

$$(\beta) \sup \{2^{-n}(f_{i,n}(z_0) - f_{i,n}(y)) \mid (i, n) \in (I \times \mathbb{N}) \setminus K \text{ und } n \leq M\} \\ = \sup \{2^{-n}(0 - f_{i,n}(y)) \mid (i, n) \in (I \times \mathbb{N}) \setminus K \text{ und } n \leq M\} \leq 0$$

$$(\gamma) \sup \{2^{-n}(f_{i,n}(z_0) - f_{i,n}(y)) \mid (i, n) \in I \times \mathbb{N} \text{ und } n > M\} \leq 2^{-M},$$

$$\text{d.h. } p(z_0, y) = \sup(\{2^{-n}(f_{i,n}(z_0) - f_{i,n}(y)) \mid (i, n) \in I \times \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \leq 2^{-M}.$$

Es folgt $p(x_0, y) \leq p(x_0, z_0) + p(z_0, y) \leq p(x_0, z_0) + 2^{-M} < r$.

$$(b) \quad \mathcal{X}_P \supset \mathcal{P}.$$

Sei $P \in \mathcal{P}$ und $x_0 \in P$. Nach Voraussetzung gibt es ein

$(i_0, n_0) \in I \times \mathbb{N}$ mit $x_0 \in U_{i_0, n_0} \subset P$ und damit gilt $f_{i_0, n_0}(x_0) > 0$.

Es ist $x_0 \in B = \{y \mid p(x_0, y) < 2^{-n_0} f_{i_0, n_0}(x_0)\} \subset P$, da für $z \notin P$

$p(x_0, z) \geq 2^{-n_0} (f_{i_0, n_0}(x_0) - f_{i_0, n_0}(z)) = 2^{-n_0} f_{i_0, n_0}(x_0)$ gilt.

$$(c) \quad \mathcal{X}_{\tilde{\mathcal{P}}} \subset \mathcal{Q}.$$

Sei $z_0 \in B' = \{y \mid p(y, x_0) < r\}$. Sei $M \in \mathbb{N}$ mit $p(z_0, x_0) + 2^{-M} < r$.

Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ist nach Voraussetzung $(U_{i, n_0})_{i \in I}$ $\mathcal{Q}$ -lokal-
endlich. Sei $\tilde{Q}$ eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung von z_0 mit

$$K = \{(i, n) \mid (i, n) \in I \times \{1, 2, \dots, M\} \text{ und } Q \cap U_{i, n} \neq \emptyset\}$$

endlich.

Aus der $\mathcal{Q}$ -oberhalb-Stetigkeit von $f_{i, n}$ für alle (i, n) folgt

$$Q = \left(\bigcap_{(i, n) \in K} f_{i, n}^{-1} [0, f_{i, n}(z_0) + 2^{-M}] \right) \cap \tilde{Q}$$

ist als endlicher Durchschnitt $\mathcal{Q}$ -offener Mengen $\mathcal{Q}$ -offen.

Q ist eine $\mathcal{Q}$ -Umgebung von z_0 .

Analog zu (a) zeige ich $Q \subset B'$.

Sei $y \in Q$, dann gilt

$$(\alpha) \quad \sup \{ 2^{-n} (f_{i, n}(y) - f_{i, n}(z_0)) \mid (i, n) \in K \} \leq 2^{-M}$$

$$(\beta) \quad \sup \{ 2^{-n} (f_{i, n}(y) - f_{i, n}(z_0)) \mid (i, n) \in (I \times \mathbb{N}) \setminus K \text{ und } n \leq M \}$$

$$= \sup \{ 2^{-n} (0 - f_{i, n}(z_0)) \mid (i, n) \in (I \times \mathbb{N}) \setminus K \text{ und } n \leq M \} \leq 0$$

$$(\gamma) \quad \sup \{ 2^{-n} (f_{i, n}(y) - f_{i, n}(z_0)) \mid (i, n) \in I \times \mathbb{N} \text{ und } n > M \} \leq 2^{-M},$$

d.h. $p(y, z_0) \leq 2^{-M}$.

Es folgt $p(y, x_0) \leq p(y, z_0) + p(z_0, x_0) \leq 2^{-M} + p(z_0, x_0) < r$.

Damit ist die Links-Pseudo-Quasimetrisierbarkeit von $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ gezeigt.

III. Analog schließt man, daß der duale Raum $(X, \varrho, \mathcal{P})$ links-pseudo-quasimetrisierbar ist. Nach 1.5 ist dann $(X, \mathcal{P}, \varrho)$ pseudo-quasimetrisierbar.

7. Der Quasimetrisationssatz für topologische Räume von H. RIBEIRO.

7.1 Satz. (RIBEIRO). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann pseudo-quasimetrisierbar, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\{U_{nx}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$y \in U_{nx} \implies U_{ny} \subset U_{n-1x}.$$

Zusatz. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann quasimetrisierbar, wenn er die obige Bedingung erfüllt und zusätzlich T_0 -Raum ist.

Beweis. (hinreichend). Sei für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ U'_{nx} definiert durch $U'_{nx} = \{y \mid x \in U_{ny}\}$. Sei $\mathcal{Q}$ die von der Subbasis $\{U'_{nx} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X\}$ erzeugte Topologie auf X .

Für den bitopologischen Raum $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ ist für jedes $x \in X$ $\{U_{nx}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{T}$ -Umgebungsbasis von x und $\{U'_{nx}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von $\mathcal{Q}$ -Umgebungen von x .

Es gilt

$$(\alpha) \quad y \in U_{nx} \implies U_{ny} \subset U_{n-1x}$$

$$U'_{nx} \subset U'_{n-1x}.$$

$$(\beta) \quad y \notin U_{n-1x} \implies U_{nx} \cap U'_{ny} = \emptyset.$$

zu (α) . (α) gilt trivialerweise.

zu (β) . Sei $U_{nx} \cap U'_{ny} \neq \emptyset$, dann gibt es ein $z \in U_{nx} \cap U'_{ny}$,

d.h. $z \in U_{nx}$ und $y \in U_{nz}$. Nach (α) gilt $U_{nz} \subset U_{n-1x}$ und damit $y \in U_{n-1x}$.

Nach 5.4 F. ist $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ links-pseudo-quasimetrisierbar und damit ist $(X, \mathcal{T})$ nach Lemma 1.9 als topologischer Raum pseudo-quasimetrisierbar.

(notwendig). Für $U_{nx} = B(x, n) = \{y \mid p(x, y) < 2^{-n}\}$ sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

(Zusatz). Klar.

Literaturverzeichnis

1. G.E.Albert, A note on quasi-metric spaces, Bull.Amer.Math. Soc., 47 (1941), S.479.
2. P.Alexandroff/P.Urysohn, Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe ($\mathcal{L}$) soit une classe ($\mathcal{J}$), C.R.Acad. Sci.Paris, 177 (1923), S.1274-1277.
3. A.Arhangelski, On the metrization of topological spaces, Bull.Acad.Polon.Math.Ser., 8 (1960), S.589-595.
4. A.H.Frink, Distance functions and metrization problem, Bull.Amer.Math.Soc., 43 (1937), S.133-142.
5. J.C.Kelley, Bitopological spaces, Proc.London Math.Soc., 13 (1963), S.71-89.
6. Y.W.Kim, Pseudo-quasi-metric spaces, Proc.Japan Acad., 44 (1968), S.1009-1012.
7. E.P.Lane, Bitopological spaces and quasi-uniform spaces, Proc.London Math.Soc., 17 (1967), S.241-256.
8. E.Michael, Yet another note on paracompact spaces, Proc. Amer.Math., 10 (1959), S.309-314.
9. K.Morita, A condition for the metrizability of topological spaces and for n-dimensionality, Sci.Rep.Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec.A5 (1955), S.33-36.
10. M.G.Murdeswar/S.A.Naimpally, Quasi-uniform topological spaces, Reprints of Research Papers Ser A, No.4, 2 (1966).
11. J.Nagata, A theorem for metrizability of a topological space, Proc.Japan Acad., 33 (1957), S.128-130.
12. J.Nagata, Modern general topology, North-Holland Publishing Company-Amsterdam (1968).
13. C.W.Patty, Bitopological spaces, Duke Math.J., 34 (1967), S.387-391.
14. H.Ribeiro, Sur les espaces à metrique faible, Portugaliae Math., 4 (1943), S.21-40 und S.65-68.

15. M.Sion/G.Zelmer, On quasi-metrizability, Can.J.Math.,
19 (1967), S.1243-1249.
16. R.A.Stoltenberg, On quasi-metric spaces, Duke Math.J.,
36 (1969), S.65-71.
17. A.H.Stone, Paracompactness and product spaces, Bull.Amer.
Math.Soc., 54 (1948), S.977-982.
18. S.Willard, General topology, Addison-Wesley Publishing
Company, Reading (Mass.), (1970).
19. W.A.Wilson, On quasi-metric spaces, Amer.J.Math., 53 (1931),
S.675-684.

Lebenslauf des Verfassers

Am 22. März 1947 wurde ich als Sohn des Arztes und Psychotherapeuten Dr. Rudolf Zimmert und dessen Frau Erika geb. Richter in Fulda geboren. Ab Ostern 1953 besuchte ich die Volksschule und trat April 1959 in die I. Oberschule Wissenschaftlichen Zweiges von Berlin-Wilmersdorf ein. Dort legte ich März 1966 die Reifeprüfung ab.

April bis September 1966 war ich als Technischer Hochschulpraktikant bei der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft beschäftigt.

Ab Wintersemester 1966/67 studierte ich die Fächer Elektrotechnik und Mathematik an der Technischen Universität Berlin. Ab Sommersemester 1968 studierte ich Mathematik und Physik an der Freien Universität Berlin.

1969 bestand ich die Diplomvorprüfung in Mathematik und 1971 die Diplomhauptprüfung in Mathematik.

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. G. Preuß.

